# Révision d'algèbre linéaire

## Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **Interpolation de Lagrange** | |
| Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$. | Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1. |
| Déterminant de Vandermonde. | Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange. |

# Intégration sur un intervalle quelconque

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **Fonctions continues par morceaux** | |
| Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$. | |
| Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux. | Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible. |
| **Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$** | |
| Pour $f$ continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$. | Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$. |
| Si $f$ est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée. | |
| Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$. | |
| **Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque** | |
| Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles. | Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $b$, en $a$. |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$ | La démonstration n'est pas exigible. L'existence des limites finies du produit $fg$ aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de $fg'$ et $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité. |
| Changement de variable : si $\varphi : ]\alpha,\beta[ \to ]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si $f$ est continue sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence. | La démonstration n'est pas exigible. Adaptation au cas où $\varphi$ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels. |

**Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables**

| | |
|---|---|
| Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire. | L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. |
| Une fonction est dite intégrable sur un intervalle $I$ si elle est continue par morceaux sur $I$ et son intégrale sur $I$ est absolument convergente. | Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $I = [a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en $b$ (resp. en $a$). |
| Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $f$ est continue, intégrable et positive sur $I$, et si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f$ est identiquement nulle. | |
| Théorème de comparaison : pour $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ : <br>– si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de $g$ en $+\infty$ implique celle de $f$. <br>– si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de $f$ en $+\infty$ est équivalente à celle de $g$. | Adaptation au cas d'un intervalle quelconque. Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$. |
| Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, <br>– intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en $0^+$ ; <br>– étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$. | L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ en $a$ peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en $a^+$ (resp. en $b^-$) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en $0^+$. |

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

## Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▹ Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$ et expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
  - ▹ Expression du déterminant de Vandermonde.
  - ▹ La convergence absolue d'une intégrale implique la convergence.
  - ▹ Pour $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $a < b \leqslant +\infty$), si $f(t) \underset{t\to b^-}{=} O(g(t))$ alors l'intégrabilité de $g$ sur $[a,b[$ implique celle de $f$.
  - ▹ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

## Prochain programme

Intégrales généralisées et début du cours de réduction des endomorphismes.