Intégration sur un intervalle quelconque

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$.	
Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0\leqslant f\leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=[fg]_a^b-\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration n'est pas exigible. L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si f est continue sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.
Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $I=[a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.	
Si f est continue, intégrable et positive sur I, et si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$:	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.
– si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f.	Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.
– si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.	
Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, – intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ; – étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$.	L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$. Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.	Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ La convergence absolue d'une intégrale implique la convergence.
  - ▷ Pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $a < b \leqslant +\infty$), si $f(t) \underset{t\to b^-}{=} O(g(t))$ alors l'intégrabilité de g sur $[a,b[$ implique celle de f.
  - ▷ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
  - ▷ Un vecteur non nul $\vec{x} \in E$ (avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) est vecteur propre de $f \in \mathscr{L}(E)$ si et seulement si la droite engendrée par $\vec{x}$ est stable par f.
  - ▷ Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
  - ▷ Lien valeur propre/racine du polynôme caractéristique.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées.