Espaces vectoriels normés

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	Normes usuelles $\Vert\ \Vert_1$, $\Vert\ \Vert_2$ et $\Vert\ \Vert_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme $\Vert\ \Vert_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère.	
Partie convexe.	Convexité des boules.
Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	
Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.
Topologie d'un espace vectoriel normé	
Point intérieur à une partie.	
Ouvert d'un espace normé.	Une boule ouverte est un ouvert.
Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.	
Fermé d'un espace normé.	Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.
Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.	
Point adhérent à une partie, adhérence.	L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.
Partie dense.	
Limite et continuité en un point	
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.	Caractérisation séquentielle.
Opérations algébriques sur les limites, composition.	
Continuité en un point.	Caractérisation séquentielle.
Continuité sur une partie	
Opérations algébriques, composition.	
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	
Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration est hors programme. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application
    $$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mapsto \|(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2}$$
    est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{C}^n$.
  - ▷ Une boule ouverte de $(E, \|\cdot\|)$ est une partie ouverte de E.
  - ▷ Une réunion quelconque de parties ouvertes de $(E, \|\cdot\|)$ est une partie ouverte de E.
  - ▷ Caractérisation séquentielle des parties fermées d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E.
  - ▷ Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés avec E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors u est lipschitzienne.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Fin du cours sur les espaces vectoriels normés et début du cours sur les suites et séries de fonctions.