Espaces vectoriels normés

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.
Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	
Continuité sur une partie	
Opérations algébriques, composition.	
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	
Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration est hors programme. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

Suite de fonctions

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	
Régularité de la limite d'une suite de fonctions	
Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Contenus	Capacités & Commentaires
Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors : $$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Suites de fonctions intégrables : Théorème de convergence dominée si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et : $$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme.
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f, et si la suite (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction g, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j < k$.	

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▹ Image réciproque d'un ouvert par une application continue.
  - ▹ Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés avec E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors u est lipschitzienne.
  - ▹ Pour (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle (non trivial) I à valeurs dans $\mathbb{K}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})$, s'il existe (u_n) une suite de réels tendant vers 0 telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$
  $$\forall n \geqslant n_0, \quad \forall x \in I, \qquad \lvert f_n(x) - f(x)\rvert \leqslant u_n$$
  alors (f_n) converge uniformément vers f sur I.
  - ▹ Théorème de continuité pour les suites de fonctions.
  - ▹ Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Suites et séries de fonctions.