

Suite et série de fonctions

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.

La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Utilisation d'une majoration uniforme de $|f_n(x)|$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$.

La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.

Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Continuité de la limite d'une suite de fonctions :

si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I , alors f est continue sur I .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions :

si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Suites de fonctions intégrables : Théorème de convergence dominée

si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n , alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

La démonstration est hors programme.

Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions :

si une suite (f_n) de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f , et si la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = g$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension aux suites de fonctions de classe \mathcal{C}^k , sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leq j < k$.

Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme d'une série de fonctions :
si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I , alors sa somme est continue sur I .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de la double limite :
si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n , f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et :

La démonstration est hors programme.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment :
si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Théorème d'intégration terme à terme :
si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I , et si la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et :

La démonstration est hors programme.

On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Dérivation de la somme d'une série de fonctions :
si une série $\sum f_n$ de classe \mathcal{C}^1 converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension à la classe \mathcal{C}^k sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Pour (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle (non trivial) I à valeurs dans \mathbb{K} , $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, s'il existe (u_n) une suite de réels tendant vers 0 telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq u_n$$
 alors (f_n) converge uniformément vers f sur I .
 - ▷ Théorème de continuité pour les suites de fonctions.
 - ▷ Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions.
 - ▷ Caractérisation de la convergence uniforme d'une série de fonctions avec les restes.
 - ▷ La convergence normale implique la convergence uniforme.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Séries de fonctions et début du cours sur les probabilités.