Série de fonctions

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Modes de convergence d'une série de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	Utilisation d'une majoration uniforme de $\lvert f_n(x)\rvert$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$. La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.
Régularité de la somme d'une série de fonctions	
Continuité de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I, alors sa somme est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et : $$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$	La démonstration est hors programme.
Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et : $$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Théorème d'intégration terme à terme : si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I, et si la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et : $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.
Dérivation de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de classe $\mathscr{C}^1$ converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation. Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

Ensembles dénombrables, familles sommables

Ce préambule propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.
Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

- Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$) avec des x_i distincts.

  Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

- En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ sa somme $\sum\limits_{i\in I} x_i \in [0,+\infty]$, et que pour tout découpage en paquets $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{i\in I_n} x_i\Big)$.

  La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ est dite sommable si $\sum\limits_{i\in I} x_i < \infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

  En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

Probabilités

Contenus	Capacités & commentaires
Univers, événements	
Univers Ω, tribu $\mathscr{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Probabilité	
Probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.	Notation $P(A)$.
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Sous-additivité : $P\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$

Contenus	Capacités & Commentaires
Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.
Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B définit une probabilité. Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\|A_n)P(A_n)$$ On rappelle la convention $P(B\|A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
Formule de Bayes.	
Événements indépendants	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $$P(A\|B) = P(A).$$
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Caractérisation de la convergence uniforme d'une série de fonctions avec les restes.
  - ▷ La convergence normale implique la convergence uniforme.
  - ▷ Stabilité par intersection dénombrable et intersection finie d'une tribu.
  - ▷ Continuité croissante d'une probabilité.
  - ▷ Formule des probabilités totales pour un système complet d'événements.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Probabilités et intégrale à paramètre.