Probabilités

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Univers, événements	
Univers Ω, tribu $\mathscr{A}$. Espace probabilisable $(\Omega,\mathscr{A})$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Probabilité	
Probabilité sur $(\Omega,\mathscr{A})$, σ-additivité.	Notation $P(A)$.
Espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire.	
Croissance de la probabilité.	
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Sous-additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$
Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.
Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.	
L'application P_B définit une probabilité.	
Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\|A_n)P(A_n)$$ On rappelle la convention $P(B\|A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
Formule de Bayes.	
Événements indépendants	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $$P(A\|B) = P(A).$$
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

Intégrale à paramètre

Contenus	Capacités & commentaires
Continuité et limite aux bornes	
Théorème de continuité : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Théorème de convergence dominée à paramètre continu: si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que : – pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors ℓ est intégrable sur I et : $$\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$	On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.
Dérivation	
Théorème de dérivation : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left\lvert \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration n'est pas exigible. En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ pour $0 \leqslant j < k$.	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▹ Stabilité par intersection dénombrable et intersection finie d'une tribu.
  - ▹ Continuité croissante d'une probabilité.
  - ▹ Formule des probabilités totales pour un système complet d'événements.
  - ▹ Théorème de continuité sous le signe $\int$
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Intégrale à paramètre et séries entières.