

Intégrale à paramètre

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Continuité et limite aux bornes

Théorème de continuité :

si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Théorème de convergence dominée à paramètre continu : si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} , a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors ℓ est intégrable sur I et :

$$\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt.$$

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

Dérivation

Théorème de dérivation :

si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

La démonstration n'est pas exigible.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension à la classe \mathcal{C}^k d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ pour $0 \leq j < k$.

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

Séries entières

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Rayon de convergence

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.

Lemme d'Abel :

si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Intervalle ouvert de convergence.

Disque ouvert de convergence.

Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) :

- si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
- si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$.

Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.

Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être directement utilisée.

Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.

Caractère \mathcal{C}^∞ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.

L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.

Relation $R(\sum a_n x^n) = R(\sum n a_n x^n)$.

Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$.

Série de Taylor d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .

Unicité du développement en série entière.

Développements des fonctions usuelles.

Formule de Taylor avec reste intégral.

Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence. La démonstration est hors programme.

Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.

Développement de $\exp(z)$ sur \mathbb{C} .

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Théorème de continuité sous le signe \int
 - ▷ Lemme d'ABEL
 - ▷ Rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ lorsque la suite (a_n) ne s'annule pas et que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

- ▷ Caractère \mathcal{C}^1 de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence
 - ▷ Développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction Arctan
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Séries entières et début du cours sur les endomorphismes d'un espace euclidien.
