Séries entières

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Rayon de convergence	
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe. Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\|z\| < \|z_0\|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\|z\| < R$, et elle diverge grossièrement si $\|z\| > R$.
Intervalle ouvert de convergence. Disque ouvert de convergence.	
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) : – si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$; – si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$. Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}$ peut être directement utilisée.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	
Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle	
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.	L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme. Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	
Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle	
Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.	Formule de Taylor avec reste intégral.
Unicité du développement en série entière.	
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

Contenus	Capacités & Commentaires
Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe	
Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.	La démonstration est hors programme.
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	

Révision de première année sur les espaces préhilbertiens et euclidiens

Contenus	Capacités & commentaires
Produit scalaire	
Produit scalaire.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.	
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.	Expression $X^\top Y$.
Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Identité remarquable $\quad \\|x+y\\|^2 = \\|x\\|^2 + \\|y\\|^2 + 2\langle x, y\rangle$.	Formule de polarisation associée.
Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F.	Notation $d(x,F)$.
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	

Endomorphismes des espaces euclidiens

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ».
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Lemme d'ABEL
  - ▷ Rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ lorsque la suite (a_n) ne s'annule pas et que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

  - ▷ Caractère $\mathscr{C}^1$ de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence
  - ▷ Développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction Arctan
  - ▷ Caractérisation d'une isométrie vectorielle par l'image d'une base orthonormée
  - ▷ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie vectorielle
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Endomorphismes d'un espace euclidien.