Révision de première année sur les espaces préhilbertiens et euclidiens

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Produit scalaire	
Produit scalaire.	Notations $\langle x,y\rangle$, $(x\|y)$, $x\cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.	
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.	Expression $X^\top Y$.
Produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Identité remarquable $\\|x+y\\|^2 = \\|x\\|^2 + \\|y\\|^2 + 2\langle x,y\rangle$.	Formule de polarisation associée.
Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F.	Notation $d(x,F)$.
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	

Endomorphismes des espaces euclidiens

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ».
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Orientation. Bases orthonormées directes.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	
Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.	Notation $\mathscr{S}(E)$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».
Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.	La démonstration n'est pas exigible. Forme matricielle du théorème spectral.
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}^+(E)$, $\mathscr{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Caractérisation d'une isométrie vectorielle par l'image d'une base orthonormée
  - ▷ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie vectorielle
  - ▷ Un projecteur p de E (euclidien) est un projecteur orthogonal si et seulement si p est autoadjoint
  - ▷ Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme autoadjoint est scindé sur $\mathbb{R}$
  - ▷ Caractérisation spectrale de $\mathscr{S}^+(E)$ et $\mathscr{S}^{++}(E)$
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Fin du chapitre sur les endomorphismes d'un espace euclidien et début du chapitre sur les variables aléatoires.