

Endomorphismes des espaces euclidiens

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^T A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. Groupe orthogonal.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ». Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Orientation. Bases orthonormées directes.	Notations $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$.
Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Description des matrices de $O_2(\mathbb{R})$, de $SO_2(\mathbb{R})$. Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$. On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	
Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.	Notation $\mathcal{S}(E)$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».
Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres. Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Matrice symétrique positive, définie positive.	La démonstration n'est pas exigible. Forme matricielle du théorème spectral. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Variables aléatoires discrètes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Définitions	
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω , telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.	L'univers Ω n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(x \in A)$. Notation $(X \geq x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.
Loi d'une variable aléatoire discrète	
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.

CONTENUS

Variable aléatoire $f(X)$.
 Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
 Couple de variables aléatoires discrètes.

 Loi conjointe, lois marginales.
 Loi conditionnelle de Y sachant un événement A .

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.
 Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.
 Notation $P(X = x, Y = y)$.
 Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

Variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.

si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

Lemme des coalitions :

si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.

De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Extension au cas de n variables aléatoires.

On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d.

Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Un projecteur p de E (euclidien) est un projecteur orthogonal si et seulement si p est autoadjoint
 - ▷ Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme autoadjoint est scindé sur $\mathbb{R}$
 - ▷ Caractérisation spectrale de $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$
 - ▷ La loi d'une variable aléatoire est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$
 - ▷ Lois marginales en fonction de la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Variables aléatoires.
