

Variables aléatoires discrètes

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω , telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.

L'univers Ω n'est en général pas explicite.

Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$.

Notation $(X \geq x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.

Loi d'une variable aléatoire discrète

Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.

La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.

On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.

Variable aléatoire $f(X)$.

Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Variable géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Notation $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Relation $P(X > k) = (1 - p)^k$.

Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Interprétation en termes d'événements rares.

Couple de variables aléatoires discrètes.

Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.

Notation $P(X = x, Y = y)$.

Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

Loi conjointe, lois marginales.

Loi conditionnelle de Y sachant un événement A .

Variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.

De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Extension au cas de n variables aléatoires.

Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.

On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d.

Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.

Fonctions de variables indépendantes :

si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

Lemme des coalitions :

si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe

Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, définie par

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x).$$

Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X .

Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, relation :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.

Formule de transfert :

$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

Linéarité de l'espérance.

Si $|X| \leq Y$ et $E(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie.

Positivité, croissance de l'espérance.

Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr.

Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

On adopte la convention $xP(X=x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$.

X est d'espérance finie si la famille $(xP(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X .

Variable centrée.

On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n -uplets de variables aléatoires.

Extension au cas de n variables aléatoires.

Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance

Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et :

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

Cas d'égalité.

Variance, écart type.

Notations $V(X)$, $\sigma(X)$.

Variable réduite.

Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Relation $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Variance d'une variable géométrique, de Poisson.

Covariance de deux variables aléatoires.

Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de deux variables indépendantes.

Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.

Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n.$$

La série entière définissant G_X est de rayon ≥ 1 et converge normalement sur $[-1, 1]$. Continuité de G_X .

Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X .

La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $E(X) = G_X'(1)$.
Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La démonstration de la réciproque n'est pas exigible.
Utilisation de G_X pour calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres :

si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = E(X_1)$,

pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma = \sigma(X_1)$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ La loi d'une variable aléatoire est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$
 - ▷ Lois marginales en fonction de la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires
 - ▷ Si X^2 est d'espérance finie (avec X une variable aléatoire réelle discrète), X est d'espérance finie
 - ▷ Inégalité de MARKOV
 - ▷ Fonction génératrice, espérance et variance d'une variable aléatoire discrète suivant une loi géométrique
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Variables aléatoires et calcul différentiel (début).