

Variables aléatoires discrètes

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω , telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.

L'univers Ω n'est en général pas explicite.

Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$.

Notation $(X \geq x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.

Loi d'une variable aléatoire discrète

Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.

La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.

On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.

Variable aléatoire $f(X)$.

Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Variable géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Notation $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Relation $P(X > k) = (1 - p)^k$.

Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Interprétation en termes d'événements rares.

Couple de variables aléatoires discrètes.

Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.

Notation $P(X = x, Y = y)$.

Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

Loi conjointe, lois marginales.

Loi conditionnelle de Y sachant un événement A .

Variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.

De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Extension au cas de n variables aléatoires.

Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.

On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d.

Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.

Fonctions de variables indépendantes :

si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

Lemme des coalitions :

si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe

Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, définie par

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x).$$

Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X .

Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, relation :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.

Formule de transfert :

$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

Linéarité de l'espérance.

Si $|X| \leq Y$ et $E(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie.

Positivité, croissance de l'espérance.

Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr.

Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

On adopte la convention $xP(X=x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$.

X est d'espérance finie si la famille $(xP(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X .

Variable centrée.

On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n -uplets de variables aléatoires.

Extension au cas de n variables aléatoires.

Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance

Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et :

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

Cas d'égalité.

Variance, écart type.

Notations $V(X)$, $\sigma(X)$.

Variable réduite.

Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Relation $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Variance d'une variable géométrique, de Poisson.

Covariance de deux variables aléatoires.

Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de deux variables indépendantes.

Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.

Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n.$$

La série entière définissant G_X est de rayon ≥ 1 et converge normalement sur $[-1, 1]$. Continuité de G_X .

Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X .

La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $E(X) = G_X'(1)$.

Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La démonstration de la réciproque n'est pas exigible.

Utilisation de G_X pour calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres :

si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = E(X_1)$,

pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma = \sigma(X_1)$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Calcul différentiel

Dérivabilité des fonctions vectorielles

Dérivabilité en un point.

Dérivabilité sur un intervalle.

Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un.

Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est p -linéaire, et $f, g, f_1, \dots, f_p$ à valeurs vectorielles.

Dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles.

Fonction de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle.

La démonstration n'est pas exigible.

Application au produit scalaire et au déterminant.

Fonctions de plusieurs variables

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dérivée en un point selon un vecteur.

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω .

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1.

Notation $D_v f(a)$.

Notation $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. On peut aussi utiliser $\partial_i f(a)$.

La démonstration n'est pas exigible.

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω .

Différentielle de f en a .

Elle est définie comme la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$:

$$df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

Notation $df(a) \cdot h$.

Règle de la chaîne

Dérivée de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.

Application au calcul des dérivées partielles de :

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)).$$

En pratique, on se limite à $n \leq 3$ et $p \leq 3$.

Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.

Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.

Gradient

Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour $h \in \mathbb{R}^p$, relation $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Le gradient est défini par ses coordonnées.

Notation $\nabla f(a)$.

Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale, et de même sens.

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Si X^2 est d'espérance finie (avec X une variable aléatoire réelle discrète), X est d'espérance finie
 - ▷ Inégalité de MARKOV
 - ▷ Fonction génératrice, espérance et variance d'une variable aléatoire discrète suivant une loi géométrique
 - ▷ Une fonction f définie sur un intervalle I (contenant au moins deux points) de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a
 - ▷ Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$) à valeurs réelles est continue sur U
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Calcul différentiel