

Calcul différentiel

Dérivabilité des fonctions vectorielles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un. Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est p -linéaire, et $f, g, f_1, \dots, f_p$ à valeurs vectorielles. Dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles. Fonction de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible. Application au produit scalaire et au déterminant.

Fonctions de plusieurs variables

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	
Dérivée en un point selon un vecteur. Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω . Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1. Différentielle de f en a .	Notation $D_v f(a)$. Notation $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. On peut aussi utiliser $\partial_i f(a)$. La démonstration n'est pas exigible. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω . Elle est définie comme la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$: $df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$ Notation $df(a) \cdot h$.
Règle de la chaîne	
Dérivée de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$. Application au calcul des dérivées partielles de : $(u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)).$ Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.	En pratique, on se limite à $n \leq 3$ et $p \leq 3$. Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.
Gradient	
Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.	Le gradient est défini par ses coordonnées. Notation $\nabla f(a)$.

Pour $h \in \mathbb{R}^p$, relation $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale, et de même sens.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Théorème de Schwarz.

Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

Notations $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

La démonstration est hors programme.

Notation $H_f(a)$.

La démonstration est hors programme.

Expression en termes de produit scalaire.

Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Extremum local, global.

Point critique d'une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Si une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point a , alors a est un point critique.

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f :

- si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a ;
- si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$, alors f n'a pas de minimum en a .

Adaptation à l'étude d'un maximum local.

Explicitation pour $p = 2$ (trace et déterminant).

Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie de $\mathbb{R}^p$.

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Une fonction f définie sur un intervalle I (contenant au moins deux points) de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a
 - ▷ Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$) à valeurs réelles est continue sur U
 - ▷ Soit U un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^p$. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est constante si et seulement si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et pour tout $a \in U$, $df(a) = 0$.
 - ▷ Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$. Si f admet un extremum local en a , alors a est un point critique de f
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Fin des colles de Mathématiques