

Intégration sur un intervalle quelconque

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.

Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.

Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est dite convergente si $\int_a^x f(t) dt$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.

Notations $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.

Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.

Propriétés des intégrales généralisées :
linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) dt.$$

Changement de variable :

si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, et si f est continue sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$.

Intégrale convergente (resp. divergente) en b , en a .

La démonstration n'est pas exigible.

L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

La démonstration n'est pas exigible.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.

Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence.

Inégalité triangulaire.

Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.

Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f est continue, intégrable et positive sur I , et si $\int_I f(t) dt = 0$, alors f est identiquement nulle.

Théorème de comparaison :

pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$:

- si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f .
- si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g .

Fonctions de référence :

pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

- intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ;
- étude de l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ en $+\infty$.

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Notations $\int_I f$, $\int_I f(t) dt$.

Pour $I = [a, b[$, (respectivement $]a, b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$.

L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée.

Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés.

Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+ .

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ La convergence absolue d'une intégrale implique la convergence.
 - ▷ Pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $a < b \leq +\infty$), si $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{=} O(g(t))$ alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f .
 - ▷ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$.
 - ▷ Pour $\alpha > 0$, convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées.