Espaces vectoriels normés

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	Normes usuelles $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme $\|\ \|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère. Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	 Convexité des boules.
Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
Topologie d'un espace vectoriel normé	
Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie. Fermé d'un espace normé. Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque. Point adhérent à une partie, adhérence. Partie dense.	 Une boule ouverte est un ouvert. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés. L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application
  $$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mapsto \|(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2}$$
  est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{C}^n$.
  - ▷ Une boule ouverte de $(E, \|\cdot\|)$ est une partie ouverte de E.
  - ▷ Une réunion quelconque de parties ouvertes de $(E, \|\cdot\|)$ est une partie ouverte de E.
  - ▷ Une intersection finie de parties ouvertes de $(E, \|\cdot\|)$ est une partie ouverte de E.
  - ▷ Caractérisation séquentielle des parties fermées d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Espaces vectoriels normés.