

# CHAPITRE SÉRIES NUMÉRIQUES : RÉVISIONS ET COMPLÉMENTS

**Objectif de ce chapitre :** donner un sens à la notion intuitive de somme infinie :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \dots$$

$$2 + 2 + 2 + \dots + 2 + \dots \dots$$

## I Séries : généralités

### I.1 Définition

#### Définition (Série numérique)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , on associe la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est appelée **la série (numérique) de terme général**  $u_n$ . On la note  $\sum u_n$  ou  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  est la **somme partielle d'indice  $n$**  de la série  $\sum u_n$ .

#### Remarques (Série de terme général définie à partir d'un certain rang)

On peut aussi définir des séries de terme général défini à partir d'un certain rang, on note dans ce cas

$$\sum_{n \geq n_0} u_n \quad \sum_{n \geq 1} u_n \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n.$$

**Exemples**  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2$  sont des séries.

### Définition (Convergence d'une série)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

- La série  $\sum u_n$  est dite **convergente** si la suite des sommes partielles  $(S_n)$  l'est. Dans ce cas, la limite de la suite  $(S_n)$  est appelée **la somme de la série**  $\sum u_n$  et est notée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

- Si la série  $\sum u_n$  est convergente alors, on définit **le reste d'indice  $n$**  de la série  $\sum u_n$  par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n.$$

On notera qu'alors la suite  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite nulle.

- Si la série n'est pas convergente, elle est dite **divergente**. Dans ce la suite  $(S_n)$  admet pour limite  $+\infty$ ,  $-\infty$  ou n'admet pas de limite.

**NB :** cette définition s'adapte aisément au cas d'une série de terme général défini à partir d'un certain rang.

### Remarques (Attention !!!)

Une série est un nouvel objet mathématique qu'il convient de manipuler correctement. En particulier les notations et le vocabulaire s'y rapportant.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$  n'ont de sens que si la série converge. La notation  $\sum u_n$  a toujours un sens que la série converge ou non.

- $\sum u_n$  est une **série**
  - $\sum_{k=0}^n u_k$  est **la somme partielle d'indice  $n$**  de la série
  - $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  est **la somme de la série**  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

- Ne pas confondre **la série**  $\sum u_n$ , avec **le réel**  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  qui est la somme de la série en cas de convergence.

**On n'écrit donc pas :** la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge, ni la somme de la série est  $\sum u_n = 5$ .

- On ne parle pas de la limite de la série, mais de la somme de la série.

**Exemples** Les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n$  convergent-elles?

### Remarques (Nature d'une série)

- **Étude de la nature.** Étudier la nature d'une série consiste à étudier la convergence ou la divergence de la série.
- **Calcul de somme.** Souvent, on étudiera la nature de la série, sans forcément en calculer la somme, mais en utilisant des propriétés du terme général. Mais parfois, on sera capable de calculer la somme.
- **Séries de même nature.** Deux séries sont de même nature si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.
- **Influence des premiers termes.** La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. La somme, OUI.  
Autrement dit :  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  ont même nature.  
Ex :  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$  et  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^n}$  convergent.
- **Changement d'indice.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n+p}$  ont même nature. Mais pas même somme.

### Méthode pratique (Comment étudier la nature d'une série?)

Pour étudier la nature de  $\sum u_n$ , on étudie la nature de la suite des sommes partielles  $(S_n)$  (c'est la définition).

## I.2 Premières séries de référence

### Théorème (Série de référence : série géométrique)

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . La série  $\sum z^n$  est convergente si et seulement si  $|z| < 1$ . Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{et} \quad \sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}.$$

#### Exercice.

- 1) Nature de la série  $\sum_{n \geq 2} 3^{-n}$  et somme éventuelle.
- 2) Dans le cas de convergence de la série  $\sum z^n$ , déterminer le reste d'indice  $n$ ,  $R_n$ .

### Théorème (Série harmonique)

La série harmonique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  diverge.

L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de prouver ces deux résultats :

### Proposition (Une série alternée)

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  converge de somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ .

### Théorème (Série exponentielle)

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  converge de somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ .

## I.3 Divergence grossière

### Théorème (Condition nécessaire de convergence)

Soit  $\sum u_n$  une série numérique.

**Si** la série  $\sum u_n$  converge **alors** la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas de limite nulle, on dit que la série **diverge grossièrement**.

 **Attention**  La réciproque est fautive.

Autrement dit, si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  alors on n'a pas forcément  $\sum u_n$  converge. Contre-exemple :

**Exemple** Exemple de série grossièrement divergente :

## I.4 Série télescopique

### Théorème (Série télescopique)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

La série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge si et seulement si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

### Méthode pratique (Etude d'une série télescopique)

- On étudie la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  :
  - ▶ si on n'étudie que la nature on se ramène au théorème précédent et on étudie la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
  - ▶ si on souhaite de plus calculer la somme de la série, on se ramène aux sommes partielles et à une somme télescopique.
- Inversement, si on souhaite étudier la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut étudier la nature de la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  (ce qui donne une nouvelle méthode pour étudier la nature d'une suite).

**Exercice.**

1) Étudier la nature et calculer la somme de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ .

2) Étudier la nature et calculer la somme de  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)$ .

## I.5 Opérations sur les séries convergentes

### Théorème (Opérations sur les séries CV)

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries numériques,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- 1) Si  $\sum u_n$  converge alors  $\sum (\lambda u_n)$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .
- 2) Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent alors  $\sum (u_n + v_n)$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .
- 3) Si  $\sum u_n$  converge et  $\sum v_n$  diverge alors  $\sum (u_n + v_n)$  diverge.
- 4) Si  $\sum u_n$  diverge et  $\lambda \neq 0$  alors  $\sum (\lambda u_n)$  diverge.

### Remarques (Attention !!)

- Pas de résultat sur la série  $\sum u_n v_n$ .
- La série  $\sum (u_n + v_n)$  peut converger sans que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ne convergent. On ne peut donc pas écrire dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Contre-exemple :

- On s'interdit d'écrire  $\lambda \times \sum u_n$  et  $\sum u_n + \sum v_n$ .

### Exercice.

- 1) Nature et somme de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (4^{-n} + 2^{3n+1} 3^{-2n-1})$ .
- 2) Nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{4}{n+1}$ .
- 3) Nature et somme de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{(n+1)!}$ .

## I.6 Séries de nombres complexes

### Théorème (Série de nombres complexes)

Une série de nombres complexes  $\sum z_n$  est convergente si et seulement si les séries de nombres réels  $\sum \operatorname{Re}(z_n)$  et  $\sum \operatorname{Im}(z_n)$  sont convergentes. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(z_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(z_n).$$

**Exercice.** Montrer que les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos n}{2^n}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin n}{2^n}$  sont convergentes et calculer leur somme.

## II Séries à termes positifs (SATP)

Dans cette partie, toutes les séries sont à termes **réels positifs à partir d'un certain rang (apcr)** :

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n \geq 0.$$

Les résultats de cette partie s'adaptent aisément aux séries à termes négatifs, en étudiant  $\sum (-u_n)$ .

### Méthode pratique (Comment montrer qu'une série est SATP)

On étudie  $\sum u_n$ . Plusieurs méthodes pour prouver que  $\sum u_n$  est SATP apcr:

- ▶ on peut faire l'étude du signe de  $u_n$  (s'y prête bien lorsque  $u_n$  s'écrit comme quotient, produits de facteurs dont on connaît le signe).
- ▶ SINON, on peut déterminer un équivalent de  $u_n$  et étudier le signe de l'équivalent ( $u_n$  est alors prouvée positive apcr).

**Exemples** Montrer que les séries  $\sum \frac{\ln n}{n(n+1)^2}$ ,  $\sum \frac{2^n}{n!}$ ,  $\sum \frac{\ln(n)^2}{n^3 - 4n + 1}$ ,  $\sum \frac{\exp(\frac{2}{n}) - \cos(\frac{1}{n})}{n^3}$  sont des SATP apcr.

### II.1 Condition nécessaire et suffisante de convergence des SATP

#### Théorème (Caractérisation de la convergence des SATP)

Soit  $\sum u_n$  une SATP apcr dont on note  $(S_n)$  la suite des sommes partielles.

La série  $\sum u_n$  converge si et seulement si la suite des sommes partielles  $(S_n)$  est majorée.

Dans ce cas  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ . Sinon la suite diverge vers  $+\infty$  et on note  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ .

**Exemples** Montrer que la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge.

### II.2 Comparaison série-intégrale

#### Théorème (Comparaison série-intégrale)

Soient  $a, b \in \mathbb{N}$  avec  $a + 1 \leq b$  et  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux, décroissante. Alors :

$$\int_a^b f(t) dt + f(b) \leq \sum_{k=a}^b f(k) \leq \int_a^b f(t) dt + f(a).$$

 **En pratique**  En pratique inutile d'apprendre par coeur cet encadrement, il faut savoir le retrouver pour l'adapter plus facilement au contexte.  
Il faut en revanche retenir l'encadrement point de départ de la démonstration, illustré par le dessin ci-dessus :

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

### Théorème (Séries de référence : séries de Riemann)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**NB** : pas de résultat sur la valeur de la somme.

### Application de la comparaison série intégrale: équivalent des sommes partielles et des restes

Exemple sur les sommes de Riemann (savoir-faire !)

- série harmonique  $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ .
- série de Riemann pour  $\alpha < 1$ ,  $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ .
- série de Riemann pour  $\alpha > 1$ ,  $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ .

## II.3 Comparaison des séries à termes positifs

L'étude de série se ramènera la plupart du temps à une comparaison à une série de référence :

### Théorème (Comparaison avec inégalités)

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux SATP apcr telles que :  $0 \leq u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang  $N$ .

- Si  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge avec :  $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$ .
- Si  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge.

**Exercice.** Déterminer la nature des séries de terme général

1)  $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$

2)  $u_n = \frac{\ln n}{n}$

3)  $u_n = \frac{\cos^2(n)}{5n^3}$

**Rappel** : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites qui ne s'annulent pas apcr, on rappelle :

- $u_n = o(v_n)$  si  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$
- $u_n = O(v_n)$  si  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est bornée
- $u_n \sim v_n$  si  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ .

En pratique il peut être commode d'écrire :  $u_n = v_n \times a_n$ . Et selon que  $(a_n)$  converge vers 0 ou est bornée on prouve  $u_n = o(v_n)$  ou  $u_n = O(v_n)$ .

### Théorème (Comparaison avec équivalents)

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux SATP apcr telles que :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ .

Alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

**Exercice.**

1) Prouver la convergence de  $\sum \frac{1}{n^2}$  à l'aide de  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ .

2) Étudier la nature de  $\sum \frac{n+5}{n^2+12}$ ,  $\sum \frac{2n+3}{n^3-5n+1}$ ,  $\sum \frac{2^n+5^{2n}}{(\ln n)^2+7^{2n}+n^3}$ .

3) Étudier la nature de  $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ ,  $\sum\left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$ .

**Théorème (Comparaison avec O et o)**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux SATP apcr telles que :  $u_n = O(v_n)$  (ou  $u_n = o(v_n)$ ).  
Si  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.

⚠ **Attention** ⚠ Si  $\sum v_n$  diverge on ne peut conclure sur la nature de  $\sum u_n$ .

**Remarques (Avantage du O sur o)**

Dans le calcul d'un développement limité pour avoir une précision en  $O(x^{k+1})$ , une partie régulière de degré  $k$  suffit.

Par exemple :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5).$$

Conséquence pour avoir une précision en  $O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$ , la partie régulière s'arrête à  $\frac{1}{n^k}$ .

**Exercice.** Déterminer un développement asymptotique à la précision  $\frac{1}{n^2}$  de  $u_n = 2 \sin \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ .

**Méthode pratique (Comparaison avec une série de Riemann)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une SATP apcr. L'objectif est la comparaison avec les séries de Riemann. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on écrit :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \times (n^\alpha u_n).$$

- Si  $\alpha > 1$  et  $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  alors  $\sum u_n$  converge (car dans ce cas  $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ )
- Si  $\alpha > 1$  et  $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}^*$  alors  $\sum u_n$  converge (car dans ce cas  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ )
- Si  $\alpha \leq 1$  et  $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}^*$  alors  $\sum u_n$  diverge (car dans ce cas  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{l}{n^\alpha}$ )
- Si  $\alpha \leq 1$  et  $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  alors  $\sum u_n$  diverge (car dans ce cas  $u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$  apcr.).

**Exercice.** Déterminer la nature des séries de terme général

1)  $u_n = n e^{-2n}$                       2)  $u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{(\ln n)^2 n^3}$                       3)  $u_n = n(\ln n)^2 e^{-3n}$                       4)  $u_n = \frac{a^n}{n^\beta}$

**Exercice. Séries de Bertrand.** Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , on étudie la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ .

Etudier la nature des séries de terme général :

1)  $u_n = \frac{1}{\ln n}$                       3)  $u_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$                       5)  $u_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}}$   
 2)  $u_n = \frac{\ln n}{n}$                       4)  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$                       6)  $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ .

### Méthode pratique (Comment étudier la nature d'une SATP)

On souhaite étudier la série  $\sum u_n$ .

- Vérifier que l'on a bien affaire à une SATP (étude de signe ou équivalent).
- On calcule la limite de  $u_n$  (éventuellement avec un équivalent), si  $u_n$  ne tend pas vers 0 alors la divergence est grossière.
- On calcule un équivalent simple de  $u_n$ ,  $u_n \sim a_n$ .
- On étudie ensuite la nature de  $\sum a_n$ .
  - si  $\sum a_n$  est une série de référence, c'est terminé.
  - sinon on la compare à une série de référence en utilisant les outils de comparaison  $\leq$ ,  $O$ , règle  $n^\alpha u_n$ . Un développement asymptotique peut s'avérer utile.

**Exercice très classique :** développement asymptotique de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

- 1) Montrer que  $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ . On pose alors :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = H_n - \ln(n)$ .
- 2) Montrer la convergence de la série de terme général  $u_n - u_{n-1}$ .
- 3) En déduire qu'il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ .

## II.4 Règle de d'Alembert

### Théorème (Règle de d'Alembert)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une série à termes **strictement positifs** au moins à partir d'un certain rang.

On suppose que la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  converge et on note  $l$  sa limite (nécessairement positive).

- 1) Si  $l < 1$ , alors la série  $\sum u_n$  converge.
- 2) Si  $l > 1$ , alors la série  $\sum u_n$  diverge.

 **Attention**  Si  $l = 1$ , on ne peut pas conclure. Contre-exemple :

**Exercice.**

- 1) Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $q \in ]0, 1[$ . Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = n^\alpha q^n$ .
- 2) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{n^n}{(n!)^\alpha}$ .
- 3) Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$ .

## III Séries de termes à signe non constant

### III.1 Séries absolument convergentes

#### Définition

Soit  $\sum u_n$  une série numérique. On dit que  $\sum u_n$  est **absolument convergente** si la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

### Théorème (Condition suffisante de convergence)

Soit  $\sum u_n$  une série numérique.

Si la série  $\sum u_n$  est absolument convergente alors  $\sum u_n$  est convergente et dans ce cas

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \quad (\text{Inégalité triangulaire})$$

### Exemple

1)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$  est absolument convergente ssi  $|q| < 1$ .

2)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$  est absolument convergente.

⚠ **Attention** ⚠ La réciproque est fautive. Contre-exemple :

**Exercice.** Justifier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n^2} \quad v_n = \frac{e^{in}}{n^2}.$$

🔗 **Explication** 📖 L'intérêt de la convergence absolue est de ramener l'étude d'une série  $\sum u_n$  à l'étude de la série à termes positifs  $\sum |u_n|$ . Tous les résultats de la partie précédente s'appliquent. En particulier on déduit le corollaire

### Corollaire (Comparaison à une SATP avec O)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Si la série  $\sum |v_n|$  converge et  $u_n = O(v_n)$  alors  $\sum u_n$  est absolument convergente (donc convergente).

**Exercice.**

1) Montrer que la série de terme général  $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{n}{n^3+1}\right)$  converge.

2) Montrer que la série de terme général  $u_n = \frac{\cos n}{n^2 - \sin n}$  converge.

3) Montrer que la série de terme général  $u_n = 2 \sin \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$  converge.

4) Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$ .

5) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln n$ . Montrer que la série de terme général  $u_n - u_{n-1}$  converge.

### Théorème (Equivalent de Stirling)

On a l'équivalent suivant :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

### Théorème (Produit de Cauchy)

Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  deux séries absolument convergentes. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Alors la série  $\sum c_n$  converge absolument avec

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \right).$$

### Exercice

1) Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ . Montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$ .

2) On rappelle que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ . Montrer à l'aide de cette expression de l'exponentielle :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad e^{a+b} = e^a e^b.$$

## III.2 Séries alternées

Les séries convergent mais ne convergent pas absolument sont appelées séries semi-convergentes.

Leur étude est délicate, deux outils principaux étant souvent utilisés : le critère spécial des séries alternées (cf. ci-dessous) et la transformation d'Abel (hors programme en PC mais qui fait parfois l'objet d'exercice).

### Définition (Séries alternées)

On appelle **série alternée** toute série de la forme  $\sum a_n$  où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $(-1)^n a_n$  est de signe constant.

**Exemples.** Les séries  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  et  $\sum (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$  sont des séries alternées.

### Théorème (Critère spécial des séries alternées)

Soit  $\sum a_n$  une série alternée telle que :

$$(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{décroît et converge vers 0.}$$

- Alors,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge.
- De plus, en notant  $R_n$  le reste d'ordre  $n$  de la série et  $S_n$  la somme partielle d'ordre  $n$ , on a :

1)  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  est du signe de son premier terme  $a_0$  et vérifie

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \leq |a_0|.$$

2) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  est encadré par  $S_{2n}$  et  $S_{2n+1}$

3) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n$  est du signe de son premier terme  $a_{n+1}$  et vérifie

$$|R_n| \leq |a_{n+1}|.$$

**Idée forte de la démonstration** (à retenir) les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes.

## Exercices.

- 1) Etudier la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .
- 2) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Montrer que la série de Riemann alternée  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 0$ .

### Remarques

⚠ **Attention** ⚠ Il n'est pas toujours aisé d'appliquer le CSSA directement à une série alternée car l'hypothèse de décroissance peut être difficile à vérifier. Dans ce cas on décompose la suite  $a_n$  en somme de termes (souvent grâce à un développement limité) que l'on traite séparément (l'un d'entre eux par le CSSA).

## Exercice.

- 1) Montrer que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  diverge.
- 2) Soit  $\alpha > 0$ . Étudier en fonction de  $\alpha$ , la nature de la série  $\sum (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ .

## IV Formulaire de PCSI

### IV.1 Formules de Taylor

#### Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soient  $f \in \mathcal{C}^{p+1}(I, \mathbb{K})$  où  $I$  est un intervalle et  $a \in I$ . Alors:

$$\forall x \in I, f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{\text{Polynôme en } x \text{ de degré } p} + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(p+1)}(t)}{p!} (x-t)^p dt}_{\text{Reste intégral}}$$

#### Corollaire (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient  $f \in \mathcal{C}^{p+1}(I, \mathbb{K})$  où  $I$  est un intervalle et  $(a, b) \in I^2$ . Alors:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{[a,b] \cap (b,a)} |f^{(p+1)}|.$$

#### Théorème (Formule de Taylor-Young)

- Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  et  $a \in I$ . Alors  $f$  admet un  $DL_n(a)$  donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n).$$

Cette formule est appelée **formule de Taylor-Young de  $f$  au voisinage de  $a$  à l'ordre  $n$** . On peut la réécrire au voisinage de 0:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n).$$

- Conséquence : si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  alors  $f$  admet un DL à tout ordre au voisinage de  $a$ .

**NB** : ce théorème est donc un théorème d'existence de DL.

## IV.2 Négligeabilités et équivalents usuels

### Théorème (Comparaisons des suites de référence)

Soient  $\alpha, \beta, a, b$  des réels.

1) Si  $\alpha < \beta$  alors  $n^\alpha = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^\beta)$ .

4) Si  $\alpha > 0$  et  $a > 1$  alors  $n^\alpha = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(a^n)$ .

2) Si  $0 < a < b$  alors  $a^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(b^n)$ .

3) Si  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  alors  $(\ln n)^\beta = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^\alpha)$ .

5) Si  $a > 1$ ,  $a^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n!)$ .

**Explication** Par ordre de négligeabilité :  $(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll a^n \ll n!$ .

### Théorème (Équivalents usuels)

$$\begin{array}{cccccc} \sin u \underset{0}{\sim} u & \operatorname{sh} u \underset{0}{\sim} u & \tan u \underset{0}{\sim} u & \operatorname{th} u \underset{0}{\sim} u & \operatorname{Arcsin} u \underset{0}{\sim} u & \\ \operatorname{Arctan} u \underset{0}{\sim} u & \ln(1+u) \underset{0}{\sim} u & (1+u)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha u \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} & e^u - 1 \underset{0}{\sim} u & & \\ & \cos u - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{u^2}{2} & \operatorname{ch} u - 1 \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2} & & & \end{array}$$

### IV.3 Développements limités usuels

#### À connaître par coeur

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$  [ $\alpha = \frac{1}{2}$  dans le DL ci-dessus]
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$  [On intègre  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ]
- $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$  [On intègre  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ]
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1})$  [Remarquer la parité]
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2})$  [Remarquer l'imparité]
- $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$  [Remarquer l'imparité]
- $\text{Arctan } x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$  [Remarquer l'imparité]
- $\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) = \sum_{k=0}^p \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1})$  [Comme le cos avec que des +]
- $\text{sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) = \sum_{k=0}^p \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2})$  [Comme le sin avec que des +]

#### À savoir retrouver

- $\text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \dots$  [Intégrer  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ]
- $\text{Arcsin } x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \dots$  [Intégrer  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ]
- $\text{Arccos } x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} - \dots$  [Arccos =  $\frac{\pi}{2}$  - Arcsin]