# CHAPITRE
# INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I Intégrale d'une fonction continue par morceaux

En PCSI, vous avez défini l'intégrale d'une fonction **continue** sur un **segment**.
On souhaite étendre cette définition d'intégrale à des fonctions **continues par morceaux** sur un **segment**.

### I.1 Fonction continue par morceaux sur un segment

**Définition (Fonction continue par morceaux sur un segment)**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. On dit que $f$ est **continue par morceaux** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille de réels $\{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ du segment $[a,b]$ telle que

- $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
- la restriction $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
- la restriction $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ possède une limite finie à droite en $x_i$ et à gauche en $x_{i+1}$, autrement dit, cette restriction est prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Une telle famille de réels est appelée subdivision adaptée à $f$ et est notée $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.
On note $\mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonction continues par morceaux sur $[a,b]$.

**Remarques**

Une fonction est donc continue par morceaux sur un segment si elle est continue sur ce segment sauf en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et à droite.

**Exemples**

1) la fonction partie entière sur $[0,3]$

2) $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

**Théorème (Propriétés des fonctions continues par morceaux sur un segment)**

1) $\mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{[a,b]}$ des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$, stable par produit.

2) Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$. Les bornes ne sont pas forcément atteintes (elles le sont si la fonction est continue).

**Définition (Fonctions continues par morceaux sur un intervalle)**

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ où $I$ est un intervalle.
On dit que $f$ est **continue par morceaux** sur $I$ si sa restriction à tout segment inclus dans $I$ est continue par morceaux.
On note $\mathscr{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonction continues par morceaux sur $I$.

**Rem :** $\mathscr{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$ est aussi un sev de l'ev $\mathbb{K}^I$.

**Exemples** La fonction $f : x \in ]0,1] \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue par morceaux sur l'intervalle $]0,1]$.

**Remarques (Continue $\Rightarrow$ continues par morceaux)**

Si $f$ est continue sur un intervalle $I$ alors $f$ est continue par morceaux sur $I$.

## I.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à $f$. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ on note $f_i$ le prolongement par continuité de $f$ sur $[x_i, x_{i+1}]$. $f_i$ étant continue sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ l'intégrale $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i$ a bien un sens.

**Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment)**

Avec les notations précédentes, l'intégrale de la fonction $f$ sur $[a,b]$, notée $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie par

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Notons que cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie.

**Remarques**

- Comme pour les fonctions continues, dans le cas où $a \geqslant b$, on peut définir : $\int_a^b f = -\int_b^a f$.
- Si $f$ est continue par morceaux sur un intervalle $I$, on peut définir $\int_a^b f$ pour tout $a, b \in I$.

**Exemples** Calculer $\int_0^3 \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t$.

**Théorème (Propriétés de l'intégrale)**

Soient $(f, g) \in \mathscr{C}_{pm}(I, \mathbb{K})^2$, $(a, b) \in I^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors:

1) **Linéarité**. $\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2) **Positivité**. Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \geqslant 0$.
3) **Croissance**. Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
4) **Chasles**. Si $c$ est compris entre $a$ et $b$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
5) **Majoration en valeur absolue/module**. Si $a \leqslant b$, $\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$.

**Remarques (Intégration bornes croissantes)**

Pour les propriétés de positivité et croissance, lorsque $a \leqslant b$, on dit qu'**on intègre bornes croissantes**.

**Exemples**

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t$. Encadrer $I_n$ pour prouver que $I_n \to 0$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t$. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)$ puis prouver que la suite $(I_n)$ converge.

## I.3 Quelques particularités dans le cas de fonctions continues

On rappelle les résultats suivants, très utiles, vus en PCSI pour les fonctions continues sur un segment.

- **Existence de primitives.** Si $f$ est continue sur un intervalle $I$, alors $f$ admet des primitives sur $I$. Plus précisément; pour tout $a \in I$, $x \mapsto \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$ est une primitive de $f$ sur $I$ (l'unique qui s'annule en $a$).
  **Attention** : si $f$ est seulement continue par morceaux, le résultat est faux.
- **Théorème de nullité de l'intégrale.** Soit $f$ une fonction $\boxed{\textbf{continue}}$ et **positive** sur le segment $[a, b]$ où $a < b$.
  - S'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$ alors $\int_a^b f > 0$.
  - Si $\int_a^b f = 0$ alors $f$ est nulle sur $[a, b]$.

  **Attention** : si $f$ est seulement continue par morceaux, le résultat est faux.

✎ **En pratique** ✎ C'est le résultat à utiliser pour montrer qu'une intégrale est strictement positive.

- **Sommes de Riemann.** Soit $f$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \qquad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Alors

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f \qquad S'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

La plupart du temps le résultat est utilisé avec $a = 0$ et $b = 1$ :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f.$$

**Exercices classiques.**

1) **Intégrale fonction de ses bornes.** On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
Déterminer l'ensemble de définition de $f$. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
Questions en plus : étudier la parité de $f$, calculer la limite de $f$ en $+\infty$.
Plus difficile : calculer la limite de $f$ en 0.

2) Montrer que l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$ est strictement positive.
On peut aussi prouver que la suite $(J_n)$ est strictement décroissante.

3) Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 \widetilde{P}(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $P$ est le polynôme nul.

4) Calculer la limite de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

# II Intégrales impropres convergentes

On souhaite désormais étendre cette définition d'intégrale à des fonctions **continues par morceaux** sur un **intervalle semi-ouvert ou ouvert**.

## II.1 Définitions

**Définition (Intégrale impropre sur un intervalle semi ouvert)**

Soit $f : [a,b[ \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux où $a$ est fini, $a < b$, $b$ fini ou non.
On dit que l'intégrale de $f$ est convergente sur $[a,b[$ ou convergente en $b$ si $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $b$.
Dans ce cas, cette limite est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et est appelée intégrale impropre de $f$ sur $[a,b[$.
Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.
**Remarque** : cette définition s'étend naturellement au cas d'un intervalle $]a,b]$.

**Exemples**

1) Étudier la convergence des intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

2) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

3) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

**Remarques (Les notions d'intégrale coincident)**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$; elle est alors aussi continue par morceaux sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$.
$\int_a^b f$ désigne donc à la fois l'intégrale de $f$ sur le segment $[a,b]$ et l'intégrale impropre de $f$ sur $[a,b[$. Ces deux notions coincident. En effet : ....

**Théorème (Cas des fonctions positives)**

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux **positive**.
L'intégrale $\int_a^b f$ est convergente si seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

**Théorème (Intégrales de Riemann)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

**Théorème (Fonctions exponentielles)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha < 0$.
- L'intégrale $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

**Théorème (Fonction logarithme)**

L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

**Théorème-Définition (Intégrale impropre sur un ouvert)**

Soit $f : ]a,b[ \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux (où $a<b$, $a,b$ finis ou non).
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente si et seulement s'il existe un réel $c \in ]a,b[$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ soient convergentes.
Dans ce cas tout $c \in ]a,b[$ fonctionne et la valeur de $\displaystyle\int_a^c f + \int_c^b f$ ne dépend pas de la valeur de $c$, on la note

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Dans le cas contraire, l'intégrale impropre est dite divergente.

**Méthode pratique (Comment reconnaître une intégrale impropre)**

Soit $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Si $a$ et $b$ sont réels et si $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors $I$ n'est pas une intégrale impropre. Il s'agit d'une intégrale sur un segment et il n'y a pas de convergence à étudier.
- Si $f$ est continue par morceaux sur $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$ sans l'être sur le segment correspondant alors $I$ est une intégrale impropre. C'est évidemment le cas si l'une des bornes est $+\infty$ ou $-\infty$.

**Exemples**

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

2) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

3) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge pour tout $\alpha$ réel.

⚠ **Attention** ⚠ L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ est divergente bien que $\displaystyle\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t = 0$.

**Théorème (Intégrale faussement impropre)**

Soit $f : [a,b[ \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux où $\boxed{b \text{ est fini}}$.
Si la fonction $f$ admet une limite finie en $b$ alors l'intégrale de $f$ sur $[a,b[$ est convergente. On dit que l'intégrale est **faussement impropre**.

**Exemples** Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)-t}{t}$ sont convergentes.

**Remarques (Cas d'une borne infinie)**

⚠ **Attention** ⚠ L'existence d'une limite nulle en $+\infty$ n'implique pas la convergence de l'intégrale en $+\infty$.
Contre-exemple :
La réciproque est également fausse, la convergence de l'intégrale en $+\infty$ n'implique pas que $f$ admet une limite nulle en $+\infty$. Contre-exemple : fonction créneau.
Ce résultat prouve que le résultat bien connu sur les séries, "la série converge $\Rightarrow$ le terme général converge vers 0" ne s'adapte pas aux intégrales généralisées.

## II.2 Propriétés des intégrales généralisées

**Théorème (Propriétés des intégrales impropres)**

Soient $I$ un intervalle de bornes $a, b$ finies ou non, $(f,g) \in \mathscr{C}_{pm}(I,\mathbb{K})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. On suppose que les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent. Alors:

1) **Linéarité**. $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge avec $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.

2) **Positivité**. Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur l'intervalle de bornes $a$ et $b$ alors $\int_a^b f \geqslant 0$.

3) **Croissance**. Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$ sur l'intervalle de bornes $a$ et $b$ alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

4) **Chasles**. Si $c$ compris entre $a$ et $b$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (les deux intégrales de droites convergent).

**Théorème (Fonctions à valeurs complexes)**

Soient $I$ un intervalle de bornes $a, b$ finies ou non et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
$\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_a^b \mathrm{Re}(f)$ et $\int_a^b \mathrm{Im}(f)$ convergent.
Dans ce cas :

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im}(f).$$

**Exemples** Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \cos(t) \,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

## II.3 Techniques de calcul

**Théorème (Changement de variable)**

Soient

- $I$ un intervalle de bornes $a, b$ finies ou non avec $a < b$
- $J$ un intervalle de bornes $\alpha, \beta$ finies ou non avec $\alpha < \beta$
- $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante
- $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction **continue**.

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
En cas de convergence, elle sont égales :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

**NB** : dans le cas $\varphi$ strictement croissante, on échange les bornes $\alpha$ et $\beta$ dans la deuxième intégrale.

**Remarques**

- **Hypothèse stricte monotonie**. Si $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\varphi'$ ne s'annule pas alors $\varphi$ est une bijection strictement monotone.
- **Rédaction**. Tant qu'on n'a pas démontré la convergence de $\int_a^b f$ on ne peut pas parler de sa valeur et dire qu'elle est égale à $\int_\alpha^\beta$ .... On rédigera de la manière suivante : "le changement de variable $x = \varphi(t)$ transforme l'intégrale $I = ...$ en l'intégrale $J = ...$. Comme $J$ est convergente alors $I$ est aussi convergente et $I = J = ...$".

**Exemples**

1) On pose $I = \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha}$. Montrer que $I$ converge et déterminer sa valeur. *On utilisera le changement de variable* $t = \mathrm{e}^u$.
2) On pose $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^\alpha}$. Montrer que $I$ converge et déterminer sa valeur. *On utilisera le changement de variable* $t = 1-u$.
3) On pose $I = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos(t)}$. Montrer que $I$ converge et déterminer sa valeur. *On utilisera le changement de variable* $t = 2\,\mathrm{Arctan}(u)$.

**Notation** : si $F$ est continue sur $]a, b[$ et possède des limites finies en $a$ et en $b$, on note :

$$[F(t)]_a^b = \lim_b F - \lim_a F.$$

**Théorème (Intégration par parties)**

Soient $I$ un intervalle de bornes $a, b$ finies ou non avec $a < b$ et $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
On suppose que le produit $fg$ admet des limites finies en $a$ et en $b$.
Alors :

- les intégrales $\int_a^b fg'$ et $\int_a^b f'g$ ont même nature
- en cas de convergence, on a

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Méthode pratique (Comment mettre en oeuvre une IPP sur une intégrale impropre)**

Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f$ lorsque $f$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b[$ :

- on pose $X$ dans $[a, b[$
- on effectue une intégration par parties sur le segment $[a, X]$
- on calcule la limite lorsque $X$ tend vers $a$.

**Exemples** Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

# III Savoir-faire

1) Majorer/minorer des intégrales, déterminer la limite d'une suite d'intégrales par encadrements.
2) Etude (ensemble de définition, dérivée) d'une intégrale fonction de ses bornes : $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} g(t)\,\mathrm{d}t$.
3) Utilisation des sommes de Riemann.
4) Calcul de limite de fonctions en un point. Utilisation des croissances comparées, des équivalents, des DL.
5) Calcul d'intégrales sur un segment (PCSI). Changement de variables, intégration par parties.
6) Étude de la convergence d'une intégrale :
   - $f : t \mapsto$ ... est continue (par morceaux) sur l'intervalle...$I$
   - est-ce une intégrale généralisée? si $I$ est un segment, c'est une intégrale de PCSI, pas de problème
   - sinon on faite UNE étude par borne ouverte
   - si la limite de $f$ en une borne finie est finie, on peut prolonger $f$ par continuité, l'intégrale est faussement impropre en cette borne
7) Connaître les intégrales de référence : Riemann, exponentielles, logarithme.

**Remarques (Erreurs classiques à éviter)**

- oublier de vérifier que les bornes sont croissantes quand on intègre bornes croissantes
- $x \mapsto \int_a^x$ est continue même si $f$ n'est que continue par morceaux. En revanche la continuité de $f$ est obligatoire et suffit pour que $F$ soit dérivable et elle est alors de classe $\mathscr{C}^1$.
- la dérivée de $x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est $u'(x)f(u(x))$ et non $f(u(x))$.
- commencer à travailler sur l'intégrale avant d'avoir étudider la continuité par morceaux. Vous pourriez passer à côté du fait que c'est une intégrale sur un segment ou une intégrale faussement impropre.
- oublier de vérifier que le changement de variable est $\mathscr{C}^1$ et bijectif.
- pratiquer une IPP sans se ramener à un segment