Pour différencier les exercices selon les difficultés, ils sont étiquetés par les symboles : $(\heartsuit)$, $(*)$, $(**)$, $(***)$.

- $(\heartsuit)$: pour un exercice très proche du cours qui ne nécessite pas trop de recherche, de calcul, de prise d'initiative. Ce sont des exercices à savoir faire et refaire évidemment.
- $(\heartsuit\heartsuit)$: pour un exercice proche du cours qui nécessite un peu plus de calculs, de prise d'initiative. Ce sont des exercices à savoir faire et refaire aussi.
- $(*)$: pour un exercice qui demande davantage de calculs, de réflexion sans pour autant être difficile.
- $(**)$: pour un exercice un peu plus difficile qui demandera davantage de prises d'initiative, davantage de calculs. Un exercice où l'on n'a pas forcément tout de suite l'idée qui marche et qui demandera donc peut-être plusieurs essais.
- $(***)$: pour un exercice beaucoup plus difficile.

Quelques rappels sur les suites

Exercice 1. $(\heartsuit)$

1) Ranger par ordre de négligeabilité au voisinage de $+\infty$,

$$\sqrt{n},\quad 9^n,\quad (\ln(n))^4,\quad n!,\quad n^5,\quad 4^n,\quad (\ln(n))^2.$$

2) Ranger par ordre de négligeabilité au voisinage de $+\infty$:

$$n^3 2^n,\quad (\ln n)^3,\quad n^5,\quad \frac{3^n}{n^2},\quad n(\ln n)^4,\quad 7^n,\quad n!\quad \frac{n^3}{(\ln n)^4},\quad n^4(\ln n)^2,\quad (\ln n)n^8.$$

Exercice 2. $(\heartsuit)$ En utilisant des équivalents ou des développements limités, déterminer les limites des suites de terme général:

1) $u_n = \dfrac{2n^2 + (\ln n)^3 - 4}{n! + n^4 - (\ln n)^6}$
2) $u_n = \dfrac{e^{\frac{3}{n}} - 1}{\ln(n+1) - \ln n}$
3) $u_n = (n^3+1)^{\frac{1}{3}} - n$
4) $u_n = \left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right)^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
5) $n^\alpha \sin \frac{1}{n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
6) $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ où $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$
7) $u_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
8) $(*) u_n = \left(\ln\left(e + \dfrac{1}{n}\right)\right)^n$
9) $u_n = \dfrac{\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}}{\operatorname{Arctan}\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}$
10) $u_n = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n}) - \sin\frac{1}{n}}{n \tan \frac{1}{n} - 1}$

Exercice 3. $(\heartsuit)$ Déterminer un équivalent simple des suites de terme général:

1) $u_n = 3^n - (\ln n)^4 + n^7 - 4n^3 + 1$
2) $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n^2}}$
3) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$
4) $u_n = n^2 \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$
5) $u_n = \sin\dfrac{1}{n} + \ln(1 + \dfrac{1}{n^2})$
6) $u_n = \sin\dfrac{3}{n^2} + \ln(1 + \dfrac{1}{n^2})$
7) $u_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
8) $u_n = \operatorname{sh}\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n}$

Exercice 4. $(\heartsuit\heartsuit)$ Déterminer la nature de la suite définie par

1) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$
2) $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right) \\ u_0 > 0 \end{cases}$
3) $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{6}(u_n^2 + 8) \\ u_0 > 0 \end{cases}$.

Exercice 5. (♡♡) On souhaite calculer $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}$.
On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

1) Montrer que la suite est bien définie et est positive.
2) Sous réserve de convergence, quelle est alors la seule limite possible pour (u_n). On la note l.
3) Prouver: $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2,\ \left|\sqrt{1+x}-\sqrt{1+y}\right|\leqslant \frac{1}{2}|x-y|$.
4) Montrer que: $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-l|\leqslant \dfrac{1}{2}|u_n-l|$. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-l|\leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-l|$.
5) En déduire la convergence de $((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Convergence et calculs de sommes

Exercice 6. (♡) Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes:

1) Séries ....

-a- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}$ -b- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-3)^{n+1}5^{-2n+1}$

2) Séries ....

-a- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2^{2n-3}}{n!}$ -b- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{5^n}{(n+2)!}$

3) Séries ....

-a- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ -b- (♡♡)$\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$

4) (♡♡)$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n\cos(n\theta)$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n\sin(n\theta)$
où $\theta\in\mathbb{R}$ et $x\in]-1,1[$

Exercice 7. (∗∗) Soit $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$. Montrer que $\displaystyle\sum\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$ converge et calculer sa somme. *Utiliser* $\sin(2a)=....?$

Exercice 8. (♡♡) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
Étudier la nature de $\sum u_n$ en fonction de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Dans le cas de convergence calculer la somme.

Exercice 9. (∗) On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.
[Pour le calcul de la somme on exprimera la somme partielle d'indice n de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}$ en fonction des sommes partielles de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^2}$ en décomposant selon les termes d'indices pair et impair]

Séries à termes positifs

Exercice 10. (♡) Étudier la convergence des séries de terme général

1) $u_n=\dfrac{1}{n^2+n}$
2) $u_n=\dfrac{1}{\ln(n)}$
3) $u_n=\dfrac{n(\ln(n))^4}{(n+1)^3}$
4) $u_n=\ln\left(1-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$
5) $u_n=\dfrac{n+1}{3^n}$
6) $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
7) $u_n=\dfrac{\ln(n)}{2^n}$
8) $u_n=\sin\left(\dfrac{2n+3}{4n^3+1}\right)$
9) $u_n=\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
10) $u_n=\dfrac{n^2}{(2n)!}$
11) $u_n=e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 11. (∗) Discuter selon les paramètres la nature des séries de terme général suivant :

1) $u_n=\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$ où $a\in\mathbb{R}$.
2) $u_n=\dfrac{1}{a^{\ln n}}$ où $a>0$
3) $u_n=\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^a}$ où $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 12. (♡♡) Etudier la nature de la suite définie par $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 13. ($*$)

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $\sum u_n$ est une séries à termes **positifs** convergente alors $\sum u_n^2$ converge.

2) Ce résultat est-il encore vrai si la série n'est pas supposée à termes positifs.

3) On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$ et que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. Étudier la série de terme général $\ln(1 + u_n)$.

Exercice 14. ($*$) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Montrer que la série $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge. *(On pourra utiliser l'inégalité $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ après l'avoir justifiée)*. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 15. (♡♡)Comparaison série intégrale

1) Soit $\alpha < 1$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. Montrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

2) Soit $\alpha > 1$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Montrer que $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Séries alternées

Exercice 16. (♡)

1) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge. Le but de la suite est de calculer la somme de cette série.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

3) En déduire le résultat voulu.

Exercice 17. (♡♡) Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ dans les cas suivants

1) $u_n = (-1)^n \sin \frac{1}{n}$

2) $u_n = (-1)^n \cos \frac{1}{n}$

3) $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

4) $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n^2}$

5) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

6) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$

7) $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Divers

Exercice 18. (♡♡) Déterminer le domaine de définition des deux fonctions

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad\qquad g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^3x}}.$$

Exercice 19. (♡♡)Constante d'Euler Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = H_n - \ln n$. Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$.

2) En déduire qu'il existe une constante γ telle que : $H_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$.

3) A l'aide de cette relation calculer la somme de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 20. $(*)$Formule de Stirling On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \mathrm{e}^n$ et $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$.

1) Montrer que : $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \dfrac{1}{2n} + \mathrm{O}(\dfrac{1}{n^2})$.

2) En déduire la nature de la série $\sum(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$.

3) En déduire que $n!$ à un équivalent de forme $C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

   On peut montrer que $C = \sqrt{2\pi}$. C'est la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 21. $(*)$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0, \pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$.

1) Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\sin x \leqslant x$.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3) Etudier la nature de la série de terme général $\ln\left(2\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

4) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $u_n \sim \alpha 2^{-n}$.

Exercice 22. $(*)$ Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe et $p \in \mathbb{N}^*$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur z pour que la série $\sum \dbinom{n}{p} z^n$ converge.

2) Pour tout complexe z pour lequel la série converge, on note : $S_p(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{p} z^p$

   Exprimer, pour $p \in \mathbb{N}, S_{p+1}(z)$ en fonction de $S_p(z)$ et $S_{p+1}(z)$; en déduire l'expression de $S_p(z)$.

Produit de Cauchy

Exercice 23. $(*)$ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$

1) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge.

2) Cacluler la somme totale de la série en la reconnaissant comme le produit de Cauchy de deux séries.

Exercice 24. $(**)$

1) En remarquant que

$$\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u$$

   démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \overset{\text{déf}}{=} H_n$$

2) En déduire que

$$\mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n!}$$