Intégrales sur un segment

Exercice 1. (♡♡) On définit pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{n+x}\,\mathrm{d}x$. Déterminer la limite de I_n. Déterminer un équivalent de I_n. [On se souviendra que pour déterminer un équivalent, on peut tenter d'encadrer par deux suites qui admettent un équivalent commun.]

Exercice 2. ($**$)mais un grand classique...
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3. (♡♡) Déterminer les limites suivantes:

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4. (♡) Calculer les limites des suites définies par les termes généraux suivants

1) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\frac{k\pi}{n}$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3n+2k}$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

4) (♡♡)$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3}$

5) (♡♡)$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^2+k^2}$

6) ($*$)$u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 5. ($*$) En faisant apparaitre une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

Exercice 6. (♡♡) On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{sh}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f. Étudier la parité de f, puis son signe.
2) Calculer la limite de f en 0.
3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Exercice 7. ($*$) Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

1) Démontrer que f est définie sur $D =]0;1[\cup]1;+\infty[$.
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D; étudier les variations de f.
3) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
4) Montrer que $\phi : t \mapsto \dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
5) En déduire la limite de f en 1.
6) Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Intégrales généralisées

Exercice 8. ($\heartsuit$) Montrer que les intégrales suivantes convergent et calculer leur valeur

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3x^2+1}{x^3+x+4}\,\mathrm{d}x$ 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ 5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ 7) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$ 4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$ 6) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$ 8) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9. ($\heartsuit\heartsuit$) Étudier en fonction du réel α la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10. ($*$)

1) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

2) Déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-k/n}}{k^2}$.

Exercice 11. ($\heartsuit$) À l'aide d'une intégration par parties montrer la convergence des intégrales suivantes et les calculer.

1) $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ 2) $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$ 3) ($\heartsuit\heartsuit$)$K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 12. ($\heartsuit$) À l'aide du changement de variable indiqué, montrer que l'intégrale est convergente et la calculer.

1) $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(3-t)(t-1)}}\,\mathrm{d}t$ avec $x = t+2$. 2) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $x = \frac{1}{t}$.

Exercice 13. ($*$) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux décroissante telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 14. ($*$) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $x = \tan(t)$ montrer que I_n converge.

2) Montrer que la suite (I_n) converge.

3) Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$ une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

4) En étudiant la suite $(\ln(I_n))$ déterminer la limite de (I_n).

5) Etudier la convergence de la série $\sum (-1)^n I_n$.

6) Déterminer une expression de I_n en fonction de n.

Exercice 15. ($*$)Comparaison série-intégrale Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction continue, décroissante à valeurs positives sur $[N;+\infty[$.

1. Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_N^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature.
2. Pour $n \geqslant N+1$, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$. Montrer que la série $\sum w_n$ converge