

2 plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - ze^{i\theta}} = \frac{1}{1 - z\cos\theta - iz\sin\theta}$$

$$= \frac{1 - z\cos\theta + iz\sin\theta}{(1 - z\cos\theta)^2 + z^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1 - z\cos\theta + iz\sin\theta}{1 + z^2 - 2z\cos\theta}$$

① (ii) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \cos(n\theta) = \frac{1 - z\cos\theta}{1 + z^2 - 2z\cos\theta}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \sin(n\theta) = \frac{z\sin\theta}{1 + z^2 - 2z\cos\theta}$$

Ex 7

Soit $x \in]0, \pi[$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^n \ln(\cos(\frac{x}{2^k}))$

On utilise $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ soit $\cos a = \frac{\sin(2a)}{2 \sin a}$

avec $a = \frac{x}{2^k} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\sin(a) \neq 0$

On obtient:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{\sin(\frac{x}{2^{k-1}})}{2 \sin(\frac{x}{2^k})} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^n \left[\ln(\sin(\frac{x}{2^{k-1}})) - \ln(2 \sin(\frac{x}{2^k})) \right]$$

$$= \ln(\sin \frac{x}{2^{-1}}) - \ln(\sin \frac{x}{2^n}) - (n+1) \ln 2$$

$$S_n = \ln(\sin(2x)) - \ln\left(2^{n+1} \sin(\frac{x}{2^n})\right)$$

Or $\sin(\frac{x}{2^n}) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n}$

d'où $2^{n+1} \sin(\frac{x}{2^n}) \sim 2x \rightarrow 2x$

Par continuité de $\ln$:

$$S_n \rightarrow \ln(\sin(2x)) - \ln(2x) = \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)$$

D'où : $\sum \ln(\cos(\frac{x}{2^k}))$ converge avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(\cos(\frac{x}{2^n})) = \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)$$

Ex 15

1) $\alpha \in]0, 1[$

On pose $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ continue et décroissante sur $[1, +\infty[$

Pour tout $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$ (*)

Soit $n \geq 2$, on somme pour $k \in \mathbb{Z}, n \geq k \geq 2$ et on utilise la relation de Cauchy et on ajoute le terme " $k=1$ ".

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$$

$$1 + \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_2^{n+1} \leq S_n \leq 1 + \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_1^n$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{1-\alpha} ((n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha})}_{= a_n} \leq S_n \leq \underbrace{1 + \frac{1}{1-\alpha} (n^{1-\alpha} - 1)}_{= b_n}$$

Comme $1-\alpha > 0$ alors $n^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$ et $(n+1)^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$

donc : $b_n \sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$

$$a_n \sim \frac{1}{1-\alpha} (n+1)^{1-\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$$

Par une application classique du th. d'encadrement

$$S_n \sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$$

Car $\alpha < 0$, f est croissante sur $[1, +\infty[$.

Les inégalités sont inversées dans les encadrements on obtient tout de même le même équivalent

2) $\alpha > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n+1$

On somme l'encadrement (*) de 1, de $k=n+1$ à N

$$\int_{n+1}^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{k=n+1}^N f(k) \leq \int_n^N f(x) dx$$

soit :

$$\frac{1}{1-\alpha} \left((N+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha} \right) \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(N^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} \right)$$

Comme $1-\alpha < 0$ alors $N^{1-\alpha} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$ et $(N+1)^{1-\alpha} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$
on passe donc à la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{1-\alpha} \times (-n^{1-\alpha}) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha} \times (-n^{1-\alpha})$$

Or $(n+1)^{1-\alpha} \sim n^{1-\alpha}$

Par une application classique du th
d'encadrement on obtient

$$\boxed{R_n \sim -\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}}$$

Ex 17 6) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$

- Si $\alpha < 0$, $n^\alpha \rightarrow 0$ donc apcr : $n^\alpha + (-1)^n < 0$ et (u_n) n'est pas définie.
- Si $\alpha = 0$, $n^\alpha + (-1)^n = 1 + (-1)^n = 0$ pour n impair d'où (u_n) n'est pas définie.

• Désormais $\alpha > 0$

$$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

d'où par comparaison à une SATP de Riemann

$\sum u_n$ est absolument CV pour $\alpha > 2$

donc $\sum u_n$ CV pour $\alpha > 2$

• Désormais $0 < \alpha \leq 2$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

On utilise le DL: $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}}_{\text{SG d'une série CV par CSSA}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)}_{\text{SG d'une série CV si } 3\alpha/2 > 1 \text{ soit } \alpha > \frac{2}{3}}$$

SG d'une série
CV par CSSA

$$\sim \frac{1}{2n^{3\alpha/2}}$$

SG d'une série
CV si $3\alpha/2 > 1$
soit $\alpha > \frac{2}{3}$

La rédaction est laissée au lecteur,

$$\sum u_n \text{ cv } \Leftrightarrow d > \frac{2}{3}$$

Ex 21

$$u_{n+1} = \sin\left(\frac{u_n}{2}\right) \quad u_0 \in]0, \pi[$$

1) - Une étude de fonction permet de prouver:

$$\boxed{\forall x > 0, \sin x \leq x} \quad [\dots]$$

2) - Montrons que (u_n) est à valeurs dans $]0, \pi[$.

$]0, \pi[$ est stable par $f: x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, en effet:

$$\forall x \in]0, \pi[, f(x) > 0 \text{ car } \frac{x}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$f(x) \leq \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ d'après 1)}$$

Comme $u_0 \in]0, \pi[$, par récurrence immédiate

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, \pi[}$$

Méthode 1: - Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \sin\left(\frac{u_n}{2}\right) - u_n$$

$$\leq \frac{u_n}{2} - u_n \text{ d'après 1) avec } x = \frac{u_n}{2} > 0$$

$$\leq -\frac{u_n}{2} < 0 \text{ car } u_n > 0$$

d'où (u_n) ↓

- La suite (u_n) est ↓ minorée par 0 donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

- La limite l vérifie:

$$* l \geq 0 \text{ en passant à la limite } u_n > 0$$

$$* l = \sin\left(\frac{l}{2}\right) \quad \text{---} \quad \text{---} \quad u_{n+1} = \sin\left(\frac{u_n}{2}\right)$$

D'après 1):

$$l \leq \frac{l}{2} \text{ car } \frac{l}{2} \leq 0$$

Donc $l = 0$

Bilan $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} = \sin\left(\frac{u_n}{2}\right) \leq \frac{u_n}{2}$$

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n u_0}_{\rightarrow 0} \quad (*)$

Par théorème d'encadrement

$$\boxed{u_n \rightarrow 0}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \ln\left(2 \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(2 \frac{\sin\left(\frac{u_n}{2}\right)}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(2 \frac{\frac{u_n}{2} - \frac{u_n^3}{48} + o(u_n^3)}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{24} + o(u_n^2)\right) \\ &= -\frac{u_n^2}{24} + o(u_n^2) \\ &= O(u_n^2) \end{aligned}$$

D'après (*), $u_n = O\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ d'où $u_n^2 = O\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

$$\text{Donc } \ln\left(2 \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = O\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

Or $\sum \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est absolument CV

$$\text{donc } \boxed{\sum \ln\left(2 \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \text{ est abs CV donc CV}}$$

4/ On pose la somme partielle de cette série pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \ln\left(2 \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} \ln 2 + \sum_{k=0}^{n+1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) \\ &= (n+2) \ln 2 + \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \\ &= \ln\left(\frac{2^{n+2} u_{n+1}}{u_0}\right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } u_n = e^{\frac{S_n}{2^n}} \frac{u_0}{2^n} = 2^{-n} e^{S_n} u_0$$

Or (S_n) converge vers $\ln \lim S_n$ alors $e^{S_n} \rightarrow e^l$

$$\text{D'où } \boxed{u_n \sim 2^{-n} e^l u_0 = C 2^{-n}}$$

Ex 22

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}^*$

1) Si $|z| \geq 1$ alors

$$\left| \binom{n}{p} z^n \right| = \binom{n}{p} |z|^n \geq \binom{n}{p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

donc $\sum \binom{n}{p} z^n$ diverge grossièrement

• Si $|z| < 1$.

$$\text{Posons } a_n = \binom{n}{p} z^n$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}} |z| = \frac{\frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}}{\frac{n!}{p!(n-p)!}} |z|$$

$$= \frac{n+1}{n+1-p} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |z| \text{ car } \frac{n+1}{n+1-p} \sim 1$$

Or $|z| < 1$ donc d'après la règle de d'Alembert

$\sum |a_n|$ converge donc $\sum a_n$ cv

Bilan:

$$\boxed{\sum a_n \text{ cv si } |z| < 1}$$

2) Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$S_{p+1}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{p+1} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p+1} \right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n-1}{p} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n-1}{p+1} z^n$$

Par décalage d'index dans les deux sommes:

$$\begin{aligned} S_{p+1}(z) &= \sum_{n=-1}^{+\infty} \binom{n}{p} z^{n+1} + \sum_{n=-1}^{+\infty} \binom{n}{p+1} z^{n+1} \\ &= z \left[\sum_{n=-1}^{+\infty} \binom{n}{p} z^n + \sum_{n=-1}^{+\infty} \binom{n}{p+1} z^n \right] \end{aligned}$$

Les deux sommes peuvent partir de 0 car $\binom{-1}{k} = 0$,
et alors :

$$S_{p+1}(z) = z (S_p(z) + S_{p+1}(z))$$

$$\text{d'où } (1-z) S_{p+1}(z) = z S_p(z)$$

$$\text{Or } z \neq 1 \quad S_{p+1}(z) = \frac{z}{1-z} S_p(z)$$

La suite $(S_p(z))_p$ est géométrique :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad S_p(z) = \left(\frac{z}{1-z} \right)^p S_0(z)$$

$$\text{Or } S_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

$$\text{D'où : } \boxed{S_p(z) = \frac{z^p}{(1-z)^{p+1}}}$$

Ex 24

1) Le changement de variable $u = 1-t$ donne

$$\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t} dt = \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u} du$$

$$\begin{aligned} \text{• Par } \frac{1-(1-t)^n}{t} &= \frac{1}{t} \left(1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-t)^k \right) \\ &= \frac{1}{t} \times \left(- \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} t^{k-1} \end{aligned}$$

On intègre, par linéarité de l'intégral

$$\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t} dt = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \int_0^1 t^{k-1} dt$$

$$\text{Or } \int_0^1 t^{k-1} dt = \frac{1}{k} \left[t^k \right]_0^1 = \frac{1}{k} \text{ et } (-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$$

$$\text{d'où : } \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t} dt = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

• Par ailleurs :

$$\frac{1-u^n}{1-u} = \sum_{k=0}^{n-1} u^k$$

On intègre, par linéarité :

$$\int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u} du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 u^k du$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{k+1} u^{k+1} \right]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

par décalage d'indice

D'où le résultat voulu

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{H_n}{n!} &= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \end{aligned}$$

Ce qui invite à poser : $a_k = \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ pour $k \geq 1$
 et $b_k = \frac{1}{k!}$

• $\sum a_n$ est absolument CV

car $|a_n| = \frac{1}{k!k} \leq \frac{1}{k!}$: TG d'une série CV

d'où par comparaison de SATP, $\sum |a_n|$ CV

• $\sum b_n$ est absolument CV, série exponentielle

D'où par produit de Cauchy, en posant

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} = H_n,$$

$\sum c_n$ est absolument CV avec :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

soit $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k k!} \right) \times e = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$