Révisions PCSI

- Equivalents usuels.
- Négligeabilités usuelles, croissances comparées.
- Développements limités.

I. Séries numériques

Révisions PCSI

- Sommes partielles, convergence, reste, somme d'une série. Attention à la précision du vocabulaire.
- Condition nécessaire de convergence (TG tend vers 0). Divergence grossière.
- Série géométrique: convergence et somme. Technique des séries géométriques dérivées (pas de formules à connaître).
- Opérations sur les séries CV : combinaisons linéaires, somme d'une série CV et d'une série DV.
- Série téléscopique.
- Série de nombres complexes.
- Comparaison série intégrale pour les SATP. Séries de Riemann.
- Théorèmes de comparaison pour les SATP: inégalités, équivalents, o et O.
- Séries absolument CV. Théorème de comparaison à une SATP.

Nouveautés PC

- Le programme insiste bien sur le fait que la méthode de comparaison série intégrale doit être bien maitrisée.
- Critère de d'Alembert.
- Produit de Cauchy de séries absolument convergente.
- Séries alternées. Critère spécial des séries alternées, majoration des restes en valeur absolue.

II. Intégrales généralisées

- **Révisions PCSI** : intégration sur un segment.
- Fonctions continues par morceaux sur un segment. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
- Intégrale impropres : définition. Cas d'une fonction continue sur un ouvert, sur un semi-ouvert. Intégrale faussement impropre.
- Intégrales de références : Riemann, $\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}$.
- Propriétés des intégrales généralisées : linéarite, positivité, croissance.
- Intégrations par parties.
- Changement de variable.
- **Attention. Pas de théorème de comparaison dans ce chapitre**

Questions de cours (preuve à connaître)

- Nature des séries de Riemann avec la comparaison série intégrale.
- Equivalence de sommes partielles ou restes par comparaison série-intégrale (par exemple dans le cas des séries de Riemann).
- Nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ sur des exemples. Les séries de Bertrand ne sont pas au programme.
- Convergence de la série exponentielle (cas complexe) et calcul de la sommes à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Critère spécial des séries alternées. Convergence (on ne demande pas la démonstration de la majoration du reste).
- Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$
- Utilisation du produit de Cauchy pour retrouver la propriété calculatoire $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \, \mathrm{e}^b$ ou pour le calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$
- Convergence d'une des intégrales de référence : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}$.
- $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$. Déterminer l'ensemble de définition de f puis montrer que f y est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer la dérivée.