Sommaire

Sous-espaces vectoriels

- **Comment montrer que F est un sev de E ?**
  - **Méthode 1** : on montre que $F \subset E$, $F \neq \emptyset$ et F stable par combinaisons linéaires.
  - **Méthode 2** : on écrit $F = \text{Vect}(\dots)$.
  - **Méthode 3** : on remarque que F est la somme ou l'intersection de sev.
  - **Méthode 4** : on montre que F est le noyau d'une application linéaire.

- **Comment montrer que deux sev F et G sont supplémentaires dans E ?**
  - **Méthode 1** : à l'aide de la définition, on montre que tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Deux stratégies pour cela :
    $\to$ **1a** : on peut partir de la décomposition, raisonner par équivalence, ce qui souvent se ramène un système dont on cherche à prouver l'existence et l'unicité de la solution
    $\to$ **1b** : on peut aussi raisonner par analyse-synthèse.
  - **Méthode 2** : on montre que $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.
  - **Méthode 3** : si on connaît une base $\mathcal{B}$ de F et une base $\mathcal{C}$ de G, on montre que la concaténation (ou la réunion) de ces deux bases est une base de E.
  - **Méthode 4** : **en dimension finie**. Si l'on sait que $\dim F + \dim G = \dim E$, alors on prouve que $F + G = E$ **ou que** $F \cap G = \{0_E\}$.

- **Comment montrer que deux sev F et G sont égaux ?**
  - **Méthode 1** : par double inclusion.
  - **Méthode 2** : en montrant qu'une famille génératrice de F est aussi famille génératrice de G.
  - **Méthode 3** : **en dimension finie**. Si l'on sait que $\dim F = \dim G$ alors on prouve une inclusion $F \subset G$ ou bien $G \subset F$.

Famille de vecteurs, dimension

- **Comment calculer le rang de $\mathcal{F}$?**
  - **Méthode 1** : on cherche une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$, quitte à simplifier la famille génératrice, alors $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F})$.

- **Méthode 2** : si la matrice A représente $\mathcal{F}$, on calcule $\operatorname{rg} A$ qui vaut alors $\operatorname{rg}(\mathcal{F})$.

▶ **Comment montrer qu'une famille est libre ?**

- **Méthode 1** : à l'aide de la définition, on part d'une combinaison linéaire nulle et on montre que les coefficients sont nuls.
- **Méthode 2** : pour une famille contenant un vecteur, vérifier qu'il est différent de O_E.
  Pour une famille contenant deux vecteurs, vérifier qu'ils ne sont pas proportionnels (ce qui souvent se "voit à l'oeil nu")

  ⚠ **Attention** ⚠ À partir de trois vecteurs, il n'y a pas de telles justifications rapides, il faut piocher parmi les autres méthodes.
- **Méthode 3** : on montre que $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{Card}(\mathcal{F})$.
- **Méthode 4** : on reconnaît une famille de polynômes échelonnée en degré.
- **Méthode 5** : La famille est extraite d'une famille libre.

▶ **Comment montrer qu'une famille $\mathcal{B}$ est génératrice de F ?**

- **Méthode 1** : on montre $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$.
- **Méthode 2** : on montre que $\operatorname{rg}(\mathcal{B}) = \dim F$ et que $\mathcal{B}$ est bien une famille de vecteurs de F.

▶ **Comment montrer qu'une famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E ?**

- **Méthode 1** : à l'aide de la définition, on montre que $\mathcal{B}$ est libre est génératrice de E.
- **Méthode 2** : on montre que tout $u \in E$ s'écrit de manière unique $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Cela fournit de plus les coordonnées de u.
- **Méthode 3** : si $\operatorname{Card}(\mathcal{B}) = \dim E$, on montre que $\mathcal{B}$ est libre **OU** génératrice de E.
- **Méthode 4** : on montre que $\operatorname{rg}(\mathcal{B}) = \operatorname{Card}(\mathcal{B}) = \dim E$.
- **Méthode 5** : on remarque que $\mathcal{B}$ est la concaténation de deux bases de sev supplémentaires de E.
- **Méthode 6** : si A est une matrice qui représente $\mathcal{B}$, on montre que A est inversible.
- **Méthode 7** : on montre que le déterminant de $\mathcal{B}$ dans relativement à une base est non nul. Si A est une matrice qui représente $\mathcal{B}$, on montre donc que $\det A \neq 0$.

▶ **Comment trouver une base de F ?**

- **Méthode** : on cherche une famille génératrice $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de F, $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$. Si $\mathcal{B}$ est libre, alors c'est une base. Sinon, on simplifie cette famille génératrice pour aboutir à une famille libre, à l'aide éventuellement d'opérations sur les colonnes d'une matrice représentant les vecteurs $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

▶ **Comment déterminer la dimension de F ?**

- **Méthode 1** : à l'aide de la définition, on détermine une base $\mathcal{B}$ de F, alors $\dim F = \operatorname{Card} \mathcal{B}$.
- **Méthode 2** : à l'aide de la formule de Grassmann, $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$
- **Méthode 3** : on montre que F est isomorphe à un espace vectoriel E, on détermine donc un ev E un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim E = \dim F$.

Applications linéaires

Dans cette section, $f : E \to F$ est une application.

▶ **Comment montrer que f est linéaire ?**

- **Méthode 1** : on prend $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(u, v) \in E^2$ et on montre que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.
- **Méthode 2** : on montre que f est le résultat d'opérations (cl, composition) sur des applications linéaires.

▶ **Comment montrer que f est un endomorphisme ?**

- **Méthode** : on montre que f est linéaire et que $f : E \to E$ (càd : $\forall u \in E,\ f(u) \in E$).

  ⚠ **Attention** ⚠ $f : E \to E$ ne signifie pas $\operatorname{Im} f = E$ mais que $\operatorname{Im} f \subset E$.

▶ **Comment montrer que f est un isomorphisme ?**

- **Méthode** : on montre que f est linéaire et bijective.

▶ **Comment montrer que f est un automorphisme ?**

- **Méthode** : on montre que f est un endomorphisme et est bijective.

▶ **Comment déterminer $\operatorname{Im} f$?**

- **Méthode 1** : à l'aide de la définition. Soit $v \in F$, $v \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists u \in E \,/\, v = f(u)$.....
  Se ramène souvent à un système dont il faut étudier la compatibilité; ou alors déterminer explicitement un u qui marche.
- **Méthode 2** : **en dimension finie**. On détermine une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ à l'aide du résultat $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. On détermine alors une base de $\operatorname{Im} f$ en simplifiant cette famille génératrice, à l'aide éventuellement d'opérations sur les colonnes d'une matrice représentant les vecteurs $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
- **Méthode 3** : **en dimension finie**. Si la matrice A représente f, on échelonne A, les colonnes restantes non nulles sont les coordonnées des vecteurs d'une base de $\operatorname{Im} f$.

▶ **Comment déterminer $\operatorname{Ker} f$?**

- **Méthode 1** : à l'aide de la définition. On résout $f(u) = 0_E$ où $u \in E$.
  Se ramène souvent à la résolution d'un système.
- **Méthode 2** : **en dimension finie**. La connaissance de $\dim \operatorname{Im} f$ donne $\dim \operatorname{Ker} f$ à l'aide du théorème du rang. Déterminer alors autant d'éléments de $\operatorname{Ker} f$ que sa dimension pour en faire une base.
- **Méthode 3** : **en dimension finie**. Si la matrice A représente f on résout $AX = 0$, où les X solution sont les matrices colonnes des coordonnées des éléments du noyau.

▶ **Comment montrer que f est bijective ?**

- **Méthode 1** : on montre que pour tout $v \in F$, $f(u) = v$ admet une unique solution (qui ramène le plus souvent à un système à résoudre). Résolution qui donne l'expression de f^{-1}.
- **Méthode 2** : on déterminer g tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
- **Méthode 3** : on montre que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f = F$.
- **Méthode 4** : **en dimension finie**. Si on connaît $\mathcal{B}$ une base de E, on montre que l'image de $\mathcal{B}$ par f est une base de F.
- **Méthode 5** : **en dimension finie**. Si l'on sait que $\dim E = \dim F$, on montre que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ **OU** que $\operatorname{Im} f = F$.
- **Méthode 6** : **en dimension finie**. On montre que $\operatorname{rg} f = \dim E = \dim F$.
- **Méthode 7** : **en dimension finie**. Si A est une matrice qui représente f, on montre que A est inversible. A^{-1} représente alors f^{-1}.
- **Méthode 8** : **en dimension finie**. On montre que $\det f \neq 0$. Si A est une matrice qui représente f, on montre donc $\det A \neq 0$

▶ **Comment montrer que f est un projecteur ?**

- **Méthode 1** : On montre que f est un endomorphisme et que $f \circ f = f$.
  Ses éléments caractéristiques sont $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ($= \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ dans ce cas).
  Dans ce cas, $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ et f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.
- **Méthode 2** : si la matrice A représente f, on montre que $A^2 = A$.

▶ **Comment montrer que f est une symétrie ?**

- **Méthode 1** : on montre que f est un endomorphisme et que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
  Ses éléments caractéristiques sont $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.
  Dans ce cas, $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ et f est la projection sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.
- **Méthode 2** : si la matrice A représente f, on montre que $A^2 = I_n$.

▶ **Comment déterminer le rang de f ?**

- **Méthode 1** : on cherche une base de $\mathrm{Im}\, f$ alors $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f$.
- **Méthode 2** : on cherche $\mathrm{Ker}\, f$, puis sa dimension, et on applique le théorème du rang.
- **Méthode 3** : si A est une matrice qui représente f, $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, A$.

Matrices

▶ **Comment calculer le rang de la matrice A ?**

- **Méthode** : les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes ne modifient pas le rang de A.
  On échelonne par colonnes ou par lignes, le rang est égal au nombre de pivots.

▶ **Comment montrer qu'une matrice A est inversible ?**

- **Méthode 1** : on résout le système $AX = Y$. A est inversible si et seulement si ce système admet une unique solution. On obtient l'inverse de A en terminant la résolution de ce système.
- **Méthode 2** : on montre que $A \overset{C}{\sim} I_n$ ou $A \overset{L}{\sim} I_n$. Les opérations similaires à partir de I_n fournissent l'inverse de A.
- **Méthode 3** : on montre que $\mathrm{rg}\, A = n$ (A est de format (n, n)).
- **Méthode 4** : on détermine B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$).
- **Méthode 5** : on observe que A est diagonale ou triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls.
- **Méthode 6** : on montre que $\det A \neq 0$.

Déterminants

▶ **Comment calculer le déterminant d'une matrice carrée A ?**

- **Méthode 1** : si la matrice est de format $(2, 2)$, on utilise la formule $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
- **Méthode 2** : si la matrice est diagonale ou triangulaire, le déterminant est le produit des éléments diagonaux.
- **Méthode 3** : si on observe une colonne (ou ligne) nulle, une combinaison linéaire nulle des colonnes (ou lignes), le déterminant est nul
- **Méthode 4** : à partir du format $(3, 3)$, on exploite les idées suivantes qui utilisent les propriétés du déterminant :
  → on fait apparaître des 0 à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes
  → on développe selon des colonnes ou lignes judicieuses (qui contiennent le plus de 0)
  → on factorise par un facteur repéré sur une colonne ou une ligne (découlant de la linéarité par rapport à chaque colonne ou ligne du déterminant)
- **Méthode 5** : pour un déterminant de format (n, n), on établit une relation de récurrence vérifiée par le déterminant (en exploitant les idées de la méthode 4).

▶ **Comment calculer le déterminant d'un endomorphisme ?**

- **Méthode** : si A est une matrice qui représente f, on calcule $\det(A)$, alors $\det f = \det A$.