

Ex 5

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \right) \times n\sqrt{n}$$

On pos $f(x) = \sqrt{x}$, f est continue sur $[0,1]$ donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \longrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \sim \frac{2}{3}$

Donc $\boxed{S_n \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}}$

Colle 1 : séries

Cours

- 1) Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$
- 2) Énoncer et démontrer le critère spécial des séries alternées.
- 3) Étudier la convergence des séries $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$.
- 4) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Exercices

- 1) Démontrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
- 2) Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+x^2}}$
- 3) Démontrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{n^2 2^n}{(n+1)!}$
- 4) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - a - \frac{b}{n}$.
- 5) Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{1+b^n}$.
- 6) Justifier que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^2}$ converge et déterminer un équivalent du reste.
- 7) Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{\ln(n)}}{n}$? Déterminer un équivalent de la suite des sommes partielles.
- 8) Soit $a > 0$. Justifier que la série de terme général $\frac{a}{n^2 + a^2}$. On note $S(a)$ la somme de cette série. Montrer que $\lim_{a \rightarrow +\infty} S(a) = \frac{\pi}{2}$.

~~Ex 6.~~

Ex 6.

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sinh t}{t} dt$$

1) On $g(t) = \frac{\sinh t}{t}$

• g est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur chaque intervalle $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow (x, 2x) \in (\mathbb{R}^*)^2 \Leftrightarrow (x, 2x) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > 0$$

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

• Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-2x} \frac{\sinh t}{t} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{\sinh(-u)/(-du)}{-u} \quad u = -t \end{aligned}$$

$$= -f(x)$$

Donc f est impaire

• Soit $x > 0$, $t \mapsto \frac{\sinh t}{t}$ est positive de $\mathbb{R}_+^*$,
en intégrant bornes croissantes:

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sinh t}{t} dt \geq 0 \quad \text{Donc } f \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

Par imparité $f \leq 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$

2) g est prolongeable par continuité en 0 car :

$$g(t) = \frac{\sinh t}{t} \sim \frac{t}{t} = 1 \rightarrow 1, \text{ on pose alors } g(0) = 1.$$

On note encore g ce prolongement, g est donc continue sur $\mathbb{R}$

3) Dès lors on peut poser G une primitive de g sur $\mathbb{R}$,
et donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = G(2x) - G(x)$

G étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors par composition et différence, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2G'(2x) - G'(x)$$

$$f'(x) = 2g(2x) - g(x)$$

$$= \begin{cases} 2 \frac{\text{sh}(2x)}{2x} - \frac{\text{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2g(0) - g(0) = g(0) = 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} \frac{\text{sh}(2x) - \text{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

Ex 7

$$f(x) = \int_2^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

1) On pose $g(t) = \frac{1}{\ln t}$

g est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ comme inverse de $\ln$ qui ne s'annule pas sur cet ensemble.

Rem: ici l'exercice ne demande pas "déterminer l'ensemble de définition de f " mais simplement de vérifier que f est bien définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

• Soit $x \in]0, 1[$ alors $(x, x^2) \in (]0, 1[)^2$ et g continue sur $]0, 1[$ donc $f(x)$ existe bien

• Soit $x \in]1, +\infty[$ alors $(x, x^2) \in]1, +\infty[^2$ et g continue sur $]1, +\infty[$ donc $f(x)$ existe bien

Par conséquent : f est bien définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

2) Posons G une primitive de g sur $]0, 1[$

Alors : $\forall x \in]0, 1[, f(x) = G(x^2) - G(x)$

Comme G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et $x \mapsto x^2$ aussi à valeurs dans $]0, 1[$ alors par composition leur différence

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ avec :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, f'(x) &= 2x G'(x^2) - G'(x) \\ &= 2x \frac{1}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

De même, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ avec

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

Comme $x-1$ et $\ln x$ ont même signe sur

$]0,1[$ et $]1,+\infty[$ alors $f'(x) > 0$

Donc f est croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

3) Soit $x \in]0,1[$ et $t \in]x^2, x[$  $x^2 < x$ car $x \in]0,1[$
Comme $\frac{1}{\ln t}$ est décroissante sur $]0,1[$,

$$\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln(x^2)}$$

On intègre bornes croissantes :

$$\int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln(x)} \leq \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln t} \leq \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln(x^2)}$$

$$\frac{x-x^2}{\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x-x^2}{2\ln(x)}$$

Donc ~~$\frac{1-x}{x} \leq f(x) \leq \frac{1-x}{2}$~~

$$\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln x}$$

Comme $x^2-x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$

alors par quotient $\frac{x^2-x}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\frac{x^2-x}{2\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

Donc par théorème des gendarmes :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}$$

• Par un calcul similaire on montre que pour tout $x > 1$,

$$\frac{x^2-x}{2\ln x} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln x}$$

Ex 7
(suite)

Or $\frac{x^2 - x}{2 \ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{\ln x} \longrightarrow +\infty$ par croissance comparée

Donc par théorème de minoration

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty}$$

4) On pose $\phi(t) = \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}$

ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

Puis pour h au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \phi(1+h) &= \frac{1}{\ln(1+h)} - \frac{1}{h} \\ &= \frac{h - \ln(1+h)}{h \ln(1+h)} \end{aligned}$$

Or $h \ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h \times h = h^2$

et $h - \ln(1+h) = h - \left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) = \frac{h^2}{2} + o(h^2) \sim \frac{h^2}{2}$

Donc $\phi(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \longrightarrow \frac{1}{2}$

Donc ϕ est prolongeable par continuité en 1

en posant $\phi(1) = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\phi \text{ est alors continue sur } \mathbb{R}_+^*}$$

5) Soit $x \in \mathbb{D}$, x au voisinage de 1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) dt + \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt \\ &= \phi(t) \end{aligned}$$

On pose H une primitive de ϕ sur $\mathbb{R}_+^*$ (qui existe car ϕ continue sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$\begin{aligned} f(x) &= H(x^2) - H(x) + \left[\ln |t-1| \right]_x^{x^2} \\ &= H(x^2) - H(x) + \ln \left| \frac{x^2-1}{x-1} \right| \end{aligned}$$

$$f(x) = H(x^2) - H(x) + \ln|x+1|$$

Quand $x \rightarrow 1$, par opérations sur la limite et continuité de H en 1:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} H(1) - H(1) + \ln 2$$

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln 2}$$

6) D'après 5) f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$.

• f est alors continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• f ~~derivable sur~~ $\mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

(d'après 2) avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\text{D'où } f'(1+h) = \frac{h}{\ln(1+h)} \sim \frac{h}{h} = 1$$

$$\text{D'où } f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$$

Donc d'après le théorème de la limite de la dérivée

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

(Ex 8) 2) $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+4} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2}$

$x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$

Soit $X \in [0, +\infty[$,

$$I(X) = \int_0^X \frac{dx}{(x+2)^2} = \left[\frac{-1}{x+2} \right]_0^X = \frac{-1}{X+2} + \frac{1}{2} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

d'où $\boxed{I \text{ converge et } I = \frac{1}{2}}$

3) $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} \quad x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$

$x \mapsto \frac{1}{x^2+3x+2}$ continue sur $[1, +\infty[$

Soit $X \in [1, +\infty[$

On décompose en éléments simples

$$F = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\text{Alors } a = [(x+1)F](-1) = 1$$

$$b = [(x+2)F](-2) = -1$$

$$\text{D'où } \int_1^X \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int_1^X \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \left[\ln|x+1| - \ln|x+2| \right]_1^X$$

$$= \ln \frac{X+1}{X+2} - \ln 2 + \ln 3$$

$$\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \left(\frac{X+1}{X+2} \sim 1 \rightarrow 1 \right)$$

Donc $\boxed{I \text{ converge et } I = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

$$6) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

• $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ continue sur $\mathbb{R}$

• Étude de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

On pose $X \geq 0$,

$$\int_0^X \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctan} X \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

d'où $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$

• De même, $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$

• Donc I converge et $I = \pi$

$$7) \quad I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

• $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ continue sur $] -1, 1[$.

• [...] laissé au lecteur ...]

On trouve $I = \pi$ (on se souvient $\operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}$)

Ex 9 $I_\alpha = \int_e^{+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x} dx$

- $x \mapsto \ln x$ continue sur $[e, +\infty[$ et strictement positive
d'où par composition puis produit par $x \mapsto \frac{1}{x}$,
 $x \mapsto \frac{(\ln x)^\alpha}{x}$ continue sur $[e, +\infty[$

Méthode 1:

- On pose $x \geq e$,

$$I_\alpha(x) = \int_e^x \frac{(\ln t)^\alpha}{t} dt \quad \text{Forme : } u^\alpha u'$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} (\ln x)^{\alpha+1} \right]_e^x & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \left[\ln |\ln x| \right]_e^x & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} \left((\ln x)^{\alpha+1} - 1 \right) & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln(\ln x) & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha+1 > 0 \text{ c'ad } \alpha > -1 \\ -\frac{1}{1+\alpha} & \text{si } \alpha+1 < 0 \text{ c'ad } \alpha < -1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

D'où

I_α converge ssi $\alpha < -1$.

Méthode 2:

- On effectue le changement de variable

$$u = \ln x \text{ c'ad } x = e^u \quad dx = e^u du$$

$u \mapsto e^u$ est $\mathcal{C}^1$, bijective strictement croissante
de $[1, +\infty[$ vers $[e, +\infty[$.

$$\text{On pose } J = \int_1^{+\infty} \frac{u^\alpha}{e^u} e^u du = \int_1^{+\infty} u^\alpha du$$

$$J = \int_1^{\infty} \frac{du}{u^\alpha}$$

J converges $\text{ssi } \alpha > 1$ and $\alpha < -1$

Donc

J converges $\text{ssi } \alpha < -1$

Ex 10 1) $I_2 = \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t^2} dt$

$f(t) \mapsto \frac{e^{-1/t}}{t^2}$ est continue sur $]0,1[$

On calcule la limite en 0 :

$$\frac{e^{-1/t}}{t^2} = \left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-1/t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

par composition de croissances comparées : $u^2 e^u \xrightarrow{u \rightarrow -\infty} 0$

$$\text{et } -\frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -\infty$$

Donc l'intégrale est faiblement impropre,
et f est prolongable par continuité sur le segment
 $[0,1]$ en posant $f(0) = 0$.

Donc, I converge.

$$I = \left[-e^{-1/t} \right]_0^1$$

$$I = e^{-1}$$

On peut écrire le crochet
sans fixer une borne $\varepsilon \rightarrow 0$
car on sait que I converge

2) f est de nouveau continue sur le segment $[0,1]$.

On reconnaît dans S_n une somme de Riemann :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \frac{e^{-1/(k/n)}}{(k/n)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Comme f est continue sur le segment $[0,1]$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt = e^{-1}$$

D'où $S_n \sim \frac{e^{-1}}{n}$

Ex 11

1/ ~~$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$~~

Ex 12

1/ $I = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{(3-t)(t-1)}}$

- $(3-t)(t-1)$ est un trinôme qui admet deux racines 1 et 3, son coefficient dominant est $-1 < 0$
d'où $(3-t)(t-1) > 0$ sur $]1, 3[$.

Par conséquent, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(3-t)(t-1)}}$ est continue sur $]1, 3[$.

- On pose $x = t-2$ c'est-à-dire $t = x+2$ $dt = dx$
 $x \mapsto x+2$ est $\mathbb{R}^2$, bijective, strictement croissante de $]1, 3[$ vers $]1, 3[$.

On pose :

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Cf ex 8/7) : J converge et vaut π

Donc I converge et vaut π

Ex 11

$$1/ I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$$

• $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ continue sur $[1, +\infty[$

• Soit $X \in [1, +\infty[$,

$$\int_1^X \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \ln t \right]_1^X + \int_1^X \frac{dt}{t^2}$$

$$\text{on a posé } \begin{cases} u(t) = \ln t & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{1}{t^2} & v'(t) = -\frac{1}{t^2} \end{cases}$$

ici, $u, v \in \mathcal{C}^1$
sur $[1, +\infty[$

$$\int_1^X \frac{\ln t}{t^2} dt = -\frac{1}{X} \ln X - \left[\frac{1}{t} \right]_1^X$$

$$= -\frac{1}{X} \ln X - \frac{1}{X} + 1$$

Par croissance comparée : $\frac{\ln X}{X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$

$$\text{d'où } \int_1^X \frac{\ln t}{t^2} dt \rightarrow 1$$

D'où I converge et I = 1

Exercice 2.

1. -a- $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \alpha \ln \left(1 + \frac{n}{1}\right) + \ln \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{n^2}{1}\right)\right) = O\left(\frac{n^2}{1}\right)$.
 Par comparaison à une série de Riemann convergente ($2 > 1$)

la série $\sum (\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ est absolument convergente.

- b- Cette série télescopique est donc convergente et par conséquent la suite $(\ln(v_n))$ converge.
 Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln v_n$. Par continuité de la fonction exponentielle, $v_n \rightarrow e^\ell > 0$ puis $u_n \sim \frac{n^\alpha}{e^\ell}$ puisque $e^\ell \neq 0$.

La série de Riemann $\sum \frac{n^\alpha}{1}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Par opérations ($e^\ell \neq 0$), $\sum \frac{n^\alpha}{e^\ell}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Par équivalence de séries à termes positifs,

$$\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

2. -a- $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O\left(\frac{n^2}{1}\right)$.

$\frac{n^2}{1} \geq 0$ et $\sum \frac{n^2}{1}$ converge.

Par sommation des relations de comparaison (cas convergent)

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (\ln v_{k+1} - \ln v_k) = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k^2}{1}\right)$$

Par comparaison série/intégrale $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{1} \sim \frac{n}{1}$ et $\sum_{k=n}^{+\infty} (\ln v_{k+1} - \ln v_k) = \ell - v_n$ donc

$$\ell - v_n = O\left(\frac{n}{1}\right).$$

On a $\ln v_n = \ell + O\left(\frac{n}{1}\right)$ puis $v_n = e^\ell e^{O\left(\frac{n}{1}\right)} = e^\ell \left(1 + O\left(\frac{n}{1}\right)\right) = e^\ell + O\left(\frac{n}{1}\right)$

$$\text{donc } u_n = \frac{e^\ell}{1} + O\left(\frac{n^{\alpha+1}}{1}\right).$$

- b- Pour que $\sum (-1)^n u_n$ converge, il est nécessaire que $u_n \rightarrow 0$ et donc $\alpha > 0$.

Inversement, si $\alpha > 0$ alors $\sum (-1)^n \frac{n^\alpha}{e^\ell}$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\sum O\left(\frac{n^{\alpha+1}}{1}\right)$ est absolument convergente. Finalement par somme $\sum (-1)^n u_n$ converge.

$\sum (-1)^n u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

3. La suite (u_n) est bien à termes strictement positifs, et

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{1} &= \sqrt{n+1} + 1 \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sqrt{n+1} + 1 - \frac{1}{1} \frac{\sqrt{n+1}}{1} + \frac{1}{1} \frac{6}{1} \frac{\sqrt{n+1}}{1} + O\left(\frac{n+1}{1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{1} \frac{6}{1} \frac{\sqrt{n+1}}{1} + \frac{1}{1} \frac{6}{1} \frac{\sqrt{n+1}}{1} + O\left(\frac{n+1}{1}\right) \end{aligned}$$

Ex 13

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux
 f décroissante

On suppose $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge

f est décroissante donc d'après le théorème de la limite monotone f admet une limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou finie.

Supposons $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$

donc il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tq: $f(x) \leq -1$ pour tout $x \geq A$

$$\text{Alors } \int_0^{+\infty} f = \int_0^A f + \int_A^{+\infty} f \quad (*)$$

Pour tout $x \in [A, +\infty[$,

$$\int_A^x f \leq \int_A^x (-1) = -x + A$$

$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$

$$\text{d'où } \int_A^x f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

d'où $\int_0^{+\infty} f$ diverge d'après (*), absurde

Supposons $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$ ou $l > 0$.

Alors il existe A tq: $\forall x \geq A, f(x) \geq \frac{l}{2}$ car $f \downarrow$

En raisonnant comme dans le cas précédent on aboutit à une contradiction

Supp $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$ ou $l < 0$

Comme $0 > \frac{l}{2} > l$ alors il existe A tq:

$$\forall x \geq A, f(x) < \frac{l}{2}$$

En raisonnant comme précédemment on obtient une contradiction.

Ex 12 2) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$

$t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

On pose $x = \frac{1}{t}$ c'ad $t = \frac{1}{x}$ $dt = -\frac{1}{x^2} dx$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^1$, bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{On pose } J &= \int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \int_{+\infty}^0 + \frac{\ln x}{x^2+1} dx \\ &= -I \end{aligned}$$

Sous réserve de convergence $I = -I$ alors
 $2I = 0$ c'ad $I = 0$.

Rem. pour prouver la convergence, voir théorème de comparaison du chapitre 5.

Faisable

au chapitre 5.

$$\left. \begin{aligned} & f(t) \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2} \geq 0 \text{ sur } [1, +\infty[\\ & f(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) \\ & \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt \text{ converge} \end{aligned} \right\} \text{ donc: } \int_1^{+\infty} f(t) dt \text{ CV}$$

$$\left. \begin{aligned} & f \leq 0 \text{ sur }]0, 1] \\ & f(t) \sim_{t \rightarrow 0} \ln t \\ & \int_0^1 \ln t dt \text{ converge} \end{aligned} \right\} \text{ donc: } \int_0^1 f(t) dt \text{ CV}$$

Ex 15

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et f continue, décroissante positive sur $[N, +\infty[$

1) Par une comparaison série-intégral classique (détails laissés au lecteur ---), pour tout $M \in \mathbb{N}^*$,

$$f(N) + \int_N^M f(t) dt \leq \sum_{k=N}^M f(k) \leq f(N) + \int_N^M f(t) dt \quad (*)$$

$$\text{On pose } S_M = \sum_{k=N}^M f(k)$$

• Si $\int_N^{+\infty} f$ converge alors comme $f \geq 0$ alors $\int_N^{+\infty} f$ majore $\int_N^M f$ donc :

$$(S_n) \text{ majoré par } f(N) + \int_N^N f$$

Comme $\sum f(k)$ est un S.T.P. alors

$$\sum f(k) < +\infty.$$

• Si $\int_N^{+\infty} f$ diverge alors comme $f \geq 0$, elle

va vers $+\infty$, donc par minoration et $(*)$

$$S_M \rightarrow +\infty$$

Donc $\sum f(k)$ diverge.

Bilan: $\sum f(k)$ et $\int_N^{+\infty} f$ ont même nature.

2) Pour tout $k \in [n-1, n]$,

$$f(n) \leq f(k) \leq f(n-1)$$

$$\text{donc } f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt \leq f(n-1)$$

Donc $0 \leq w_n \leq f(n-1) - f(n)$

• $\sum w_n$ est une SATP

• $\sum (f(n-1) - f(n))$ est une série télescopique convergente car la suite $(f(n))$ converge (en effet $f(n)$ est positive donc d'après le TLN $(f(n))$ converge)

• Par comparaison de SATP, $\boxed{\sum w_n \text{ cv.}}$