Espaces vectoriels

Exercice 1. (♡)-(♡♡)

1) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que la famille $((X-\alpha)^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k : x \mapsto |x - i|$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.
3) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels deux à deux distincts. On pose pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_k x}$.
Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Exercice 2. (♡) On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que $\mathcal{A}_n(K)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer leur dimension.
2) Montrer alors qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Applications linéaires

Exercice 3. (♡♡) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit l'application f par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P(X+1) - P(X).$$

1) Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2) Déterminer le degré de $f(X^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
3) Déterminer le noyau de f.
4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   -a- Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable paar f.
   On note f_n l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   -b- Déterminer le rang puis l'image de $\mathbb{R}_n[X]$.
5) Montrer que f est surjectif.

Exercice 4. (♡) Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Exercice 5. (♡) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

1) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
2) On suppose ici que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

Exercice 6. (♡♡) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soient $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$ (i.e. f et g commutent). Montrer que le noyau et l'image de f sont stables par g.

Exercice 7. ($*$) Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, p un projecteur et f un endomorphisme de E. Montrer que p et f commutent si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.

Exercice 8. (♡) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 9. ($\heartsuit\heartsuit$) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E tel que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$. En déduire que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.
2) Déduire de ce qui précède que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 10. Noyaux et images des itérés
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \mathrm{Ker} f^k$ et $I_k = \mathrm{Im} f^k$.

1) ($\heartsuit$)Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$.
2) ($\heartsuit\heartsuit$)Démontrer que, s'il existe un entier p tel que $N_p = N_{p+1}$, alors pour tout entier q supérieur ou égal à p, $N_q = N_{q+1}$ puis $N_q = N_p$.

   ($*$)On suppose maintenant que E est dimension finie n.

3) Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang p inférieur ou égal à n.
   Dans la suite p désigne le plus petit entier tel que $N_p = N_{p+1}$.
4) Que peut-on dire de la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$?
5) Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.

Exercice 11. ($*$) Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer que n est pair si et seulement si il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$.

Applications linéaires et matrices

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1) Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 1$.
2) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. ($*$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme nilpotent, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit q le plus petit entier vérifiant la relation précédente (on l'appelle indice de nilpotence de u).

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0_E$ et que la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{q-1}(x))$ est libre.
2) Comparer q et n.
3) Déduire finalement que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4) Cas $n = p$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base et déterminer la matrice de f relativement à cette base $\mathcal{B}$.

Exercice 14. ($*$) Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. L'objectif de l'exercice est de prouver :

$$\mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \mathrm{rg}\, f \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \mathrm{rg}\, g.$$

1) A l'aide d'une inclusion entre $\mathrm{Im}(g\circ f)$ et $\mathrm{Im}\, g$ obtenir une des deux inégalités.
2) On pose h la restriction de g à $\mathrm{Im}\, f$, $h = g_{|\,\mathrm{Im}\, f}$. Montrer que $\mathrm{Im}(g\circ f) = \mathrm{Im}\, h$. En déduire à l'aide du théorème du rang l'autre inégalité voulue.
3) Application. Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Montrer que $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$.

Exercice 15. (♡)

1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   Déterminer le rang de f, une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$.

2) On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ et g l'application linéaire canoniquement associée à B.
   Déterminer le rang de g une base de $\operatorname{Im} g$ et une base de $\operatorname{Ker} g$.

Exercice 16. (♡) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que f est un projecteur.

2) Déterminer ses éléments caractéristiques.

3) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Une telle base est appelée une base adaptée à f.

Exercice 17. (♡) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère l'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto & AX. \end{array}$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Déterminer noyau et image de φ.

Exercice 18. (♡♡)- Diagonalisation Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer une base de chacun des noyaux suivants $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id})$, $\operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id})$.

2) En déduire une base $\mathcal{B}'$ où la matrice de f est diagonale. On notera D cette matrice.

3) Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

4) En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

5) **Application :** déterminer le terme général des suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 4v_n - w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 2w_n \\ w_{n+1} = 7u_n + 4v_n - 3w_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = -1 \end{cases} .$$

Exercice 19. (♡) Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables à I_n.

Exercice 20. (♡) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Exercice 21. (♡) Montrer que les matrices suivantes sont semblables et déterminer la matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. Puis calculer A^n.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 22. ($*$) Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première ligne et la première colonne qui valent 1.
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 23. ($*$) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{Tr}(A) = 1$. Montrer que $A^2 = A$.

Exercice 24. (♡♡) Soit p un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie E. Montrer que $\operatorname{rg}(p) = \operatorname{Tr}(p)$.

Exercice 25. ($*$) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$. Résoudre l'équation $X + Tr(X)A = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(K)$

Exercice 26. ($*$) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1) Calculer $\operatorname{rg}(B)$ en fonction de $\operatorname{rg}(A)$.
2) On suppose que A est inversible. Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1}.

Déterminants

Exercice 27. (♡♡) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer et déterminer une forme factorisée des déterminants suivants:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$

Exercice 28. (♡♡) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}_{[n]}$

Exercice 29. ($*$) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit Δ_n le déterminant de format $(2n, 2n)$ avec des a sur la diagonale principale et des b sur l'autre diagonale. Calculer Δ_n.

Exercice 30. (♡♡) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $D_n = \begin{vmatrix} a & -a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & a & -a^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -a^2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & a \end{vmatrix}_{[n]}$. Calculer D_n en fonction de n.

Exercice 31. ($*$)

1) Calculer le déterminant de la matrice blocs $\begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$.
2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$