Chapitre
Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Ce long chapitre est pour la grande majorité un chapitre de révision de toute l'algèbre linéaire de PCSI, il y a cependant quelques compléments de PC qui sont clairement mentionnés comme nouveauté :

- II.8. Somme de n sous espaces vectoriels
- Dans III.1. Dimension de $E_1 \times \cdots \times E_n$
- III.3. Somme de de n sous espaces vectoriels
- V. Sous-espaces stables
- VIII. Trace
- X. Interpolation de Lagrange

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels et applications linéaires

I.1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Définition (Espace vectoriel)

Un ensemble E est un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** s'il est muni d'une loi notée $+$ et d'une loi notée $\cdot$ telles que :

- $+$ est associative : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $(x+y)+z = x+(y+z)$
- $+$ est commutative : $\forall (x,y) \in E^2$, $x+y = y+x$
- $+$ admet un neutre noté 0_E : $\forall x \in E$, $x + 0_E = 0_E + x$
- tout $x \in E$ admet un opposé, noté $-x$ vérifiant : $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$
- Pour tout $(x,y) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

  $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu \cdot x \qquad \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x+\lambda\cdot y \qquad \lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x \qquad 1\cdot x = x$ où 1 neutre de $\mathbb{K}$.

L'espace vectoriel est alors noté $(E, +, \cdot)$. Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.
Le neutre 0_E de $+$ est appelé le **vecteur nul**

Construction d'espaces vectoriels :

- **Produit cartésien d'espaces vectoriels**.
  Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On munit l'ensemble $E \times F$ de deux lois:

  $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

  Alors $(E \times F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément neutre $(0_E, 0_F)$ et l'opposé de $(x,y) \in E \times F$ est $(-x, -y)$.

  Notation : les lois sont toutes notées $+$ ou $\cdot$ qu'elles soient envisagées sur E, F ou $E \times F$.

  Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels on munit $E_1 \times \cdots \times E_n$ de deux lois

  $$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

  Alors $(E_1 \times \cdots \times E_n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément neutre $(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n})$ et l'opposé de $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ est $(-x_1, \ldots, -x_n)$.

- **Espace vectoriel E^X.**
  Soit X un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On munit l'ensemble $E^X = \mathcal{F}(X, E)$ de deux lois en posant, pour tout $(f, g) \in (E^X)^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$f + g : \begin{array}{ccc} X & \to & E \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \qquad \lambda f : \begin{array}{ccc} X & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}.$$

  Alors E^X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément neutre $0_{E^X} : x \in X \mapsto 0_E$ (l'application nulle) et l'opposé de $f \in E^X$ est $-f : x \in X \mapsto -f(x) \in E$.

Exemples $\mathbb{K}$ - espaces vectoriels usuels à connaître :

1) $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ que l'on confondra parfois avec $\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$, autrement dit, on confondra le vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ et la matrice-colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$
2) $\mathbb{K}^I$ où I est un intervalle
3) l'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
4) l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$
5) l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de E on utilise le plus souvent le résultat suivant :

Théorème (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. F est un sous-espace vectoriel de E (sev de E) si et seulement si :

1) F est une partie de E
2) $F \neq \emptyset$ ($0_E \in F$)
3) **Stabilité par combinaisons linéaires**

$$\forall (x, y) \in F^2, \; \forall \lambda \in \mathbb{K}, \; \lambda x + y \in F.$$

Exemples $\mathbb{K}$-espaces vectoriels usuels qui sont sev d'ev usuel :

1) $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$
2) $\mathbb{K}_n[X]$
3) l'ensemble solution d'une équation différentielle du premier ordre ou du second ordre linéaire homogène
4) l'ensemble solution d'un système linéaire homogène
5) E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E appelés **sous-espaces vectoriels triviaux.**

Exercice.

1) Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + 5y + 7z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x + 2y + 4z = 5\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer que $c_0(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ / \ u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
4) Montrer que $F = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \widetilde{P}(1) = \widetilde{P}(2) = 0 \right\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
5) Soit I un intervalle centré en 0. Les ensembles $\mathcal{I} = \{f \in \mathbb{R}^I \ / \ f \text{ impaire}\}$ et $\mathcal{P} = \{f \in \mathbb{R}^I \ / \ f \text{ paire}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^I$.

Théorème (Intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Toute intersection (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

⚠ **Attention** ⚠ La réunion de sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel. Contre-exemple :

I.2 Applications linéaires

Définition (Application linéaire)

- On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $f : E \to F$ telle que:
  $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.
  L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$, c'est un espace vectoriel.
- On appelle **endomorphisme linéaire** de E toute application linéaire de E dans E est . Leur ensemble est noté $\mathcal{L}(E)$.
- On appelle **isomorphisme** toute application linéaire de E dans F et bijective.
- On appelle **automorphisme** de E tout endomorphisme bijectif de E dans E. Leur ensemble est noté $\mathrm{GL}(E)$.
- On appelle **forme linéaire** toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. Leur ensemble est noté $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Exercice.

1) Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, x + y) \end{array}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y + 1 \end{array}$ n'est pas linéaire.

3) Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x^2 + x, x + y) \end{array}$ n'est pas linéaire.

4) Montrer que l'application $F : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ est linéaire.

5) Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est une forme linéaire.

Théorème (Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base.)

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = u_i$.
Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de l'ensemble de départ.

Théorème-Définition (Noyau/Image - Caractérisation de l'injectivité/surjectivité)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Le **noyau de** f est $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E.
  $\boxed{f \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} f = \{0_E\}}$

- L'**image de** f est $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) \ / \ x \in E\}$. C'est un sous-espace vectoriel de F.
  Famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

  $$\text{Si } E = \operatorname{Vect}((e_1, \ldots, e_n)) \text{ alors } \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

  $\boxed{f \text{ est surjective} \iff \operatorname{Im} f = F}$.

Exercice.

1) Déterminer le noyau et l'image de l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y-z, 2x+y, -3y+2z) \end{array}$.

2) Déterminer le noyau et l'image de l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

3) Déterminer le noyau et l'image de l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (\widetilde{P}(0), \widetilde{P'}(1)) \end{array}$.

4) **Des inclusions classiques.** Soient $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

   -a- Montrer que :$\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im} f$ $\qquad$ $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f^2)$ où $f^2 = f \circ f$

   -b- On suppose que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Établir une inclusion entre $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} g$.

II Famille de vecteurs

II.1 Famille libre

Définition (Famille libre)

- Une famille $(a_1, \ldots, a_n)$ est dite **libre** si :

  $$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda_i a_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda_i = 0.$$

- Si $\mathcal{F}$ n'est pas libre on dit que la famille est **liée.**, dans ce cas l'un des vecteurs a_i est combinaison linéaire des autres vecteurs.

✎ Méthode pratique ✎ (Montrer qu'une famille finie est libre)

Pour montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre :

- ▶ prendre $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$ *(cela mène souvent à un système)*
- ▶ puis déduire que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$

Exercice.

1) Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $\varepsilon_1 = (1,-1,1)$, $\varepsilon_2 = (0,1,2)$, $\varepsilon_3 = (2,0,3)$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est-elle libre?

2) Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $\varepsilon_1 = (2,1,0)$, $\varepsilon_2 = (4,5,-2)$, $\varepsilon_3 = (1,-1,1)$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est-elle libre?

3) Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $P_1 = 2X^2 - X + 1$, $P_2 = X$, $P_3 = X^2 - 3$. La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle libre?

4) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on pose $f_1 : x \mapsto |x-1|$, $f_1 : x \mapsto |x|$, $f_1 : x \mapsto |x+1|$. La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre?

On retiendra ce résultat utile pour les familles de polynômes

Propriétés (Liberté de famille de polynômes)

1) Toute famille de polynômes **non nuls** échelonnée en degrés est libre.
2) Toute famille de polynômes **non nuls** de degrés deux à deux distincts est libre.

II.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Théorème-Définition (Sev engendré par une famille de vecteurs.)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ une partie de E.
L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \qquad \text{où } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

est un sous-espace vectoriel de E, que l'on note $\mathrm{Vect}(A)$ ou $\mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_n)$. C'est le sous-espace vectoriel engendré par A.
NB : $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit, au sens de l'inclusion, sev de E contenant A.

II.3 Bases

Théorème-Définition (Base)

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que $(e_1, \dots, e_n)$ est une **base de** E si la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et génératrice.
- De manière équivalente $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$.

  Les coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ de x dans la base $\mathcal{B}$ telles que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ sont notées en colonnes

  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$: **matrice des coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples À connaître : bases canoniques.

1) La base canonique de $\mathbb{C}$ (comme $\mathbb{R}$-ev) : (comme $\mathbb{C}$-ev) :
2) La base canonique de $\mathbb{K}^n$:
3) La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$:
4) La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

Exercice.

1) Donner une base de $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x - 3y = 0\}$.
2) Donner une base de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 3z = 0\}$.
3) Donner une base de $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ \widetilde{P}(3) = 0\}$
4) Donner une base de $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = 0_2\}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
5) Donner une base de $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \ / \ f' + 3f = 0\}$.
6) Donner une base de $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \ / \ f'' - 3f' + 2f = 0\}$.

II.4 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition (Matrice d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-ev E.
Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, les x_j se décomposent dans la base $\mathcal{B}$:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \qquad a_{ij} \text{ } i\text{-ième coordonné de } x_j.$$

La **matrice de la famille** $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ **dans la base** $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_2 & & x_j & & x_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array}.$$

(On écrit donc en colonnes les coordonnées de x_j.)

Exemples

1) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$.
Déterminer la matrice de (u_1, u_2) dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice de (u_2, u_1) dans la base $\mathcal{B}$.

2) Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On pose $P_1 = X^3 + X$, $P_2 = -X^2 + 2X + 1$, $P_3 = X^3 - 2X + 2$.
Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1, P_2, P_3)$.

II.5 Somme de sous-espaces vectoriels

Théorème-Définition (Somme d'espaces vectoriels)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

- On définit la **somme** de E_1 et E_2 par: $E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 \ / \ x_1 \in E_1 \ , \ x_2 \in E_2\}$. $E_1 + E_2$ est donc l'ensemble des éléments de E qui s'écrivent comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2.
- L'ensemble $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient E_1 et E_2.
- **Concaténation de familles génératrices**.
Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ des familles génératrices respectives de E_1 et E_2. Alors: $E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$.
En particulier, soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ des vecteurs de E. Alors:
$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) + \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_m) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Tout vecteur x de E_1+E_2 peut se décomposer $x=x_1+x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Cette décomposition est-elle unique? Le résultat suivant répond à la question.

Théorème-Définition (Somme directe - Supplémentaires)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

- E_1 et E_2 sont dits en **somme directe** si tout vecteur de E_1+E_2 s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
  On note alors $E_1 \oplus E_2$ au lieu de E_1+E_2, pour indiquer qu'il y a somme directe.
  On a : E_1, E_2 sont en somme directe $\Longleftrightarrow E_1 \cap E_2=\{0_E\}$

- Si $E_1 \oplus E_2=E$ on dit que E_1 et E_2 sont **supplémentaires** dans E c'est-à-dire que tout élément de E s'écrit de manière **unique** comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2:

$$\forall x \in E,\ \ \exists!\,(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \,/\, x=x_1+x_2.$$

  On a : E_1, E_2 sont supplémentaires dans $E \Longleftrightarrow \begin{cases} E=E_1+E_2 \\ E_1 \cap E_2=\{0_E\} \end{cases}$.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment prouver que deux sev sont supplémentaires.)

► Si on peut, on raisonne par équivalence. Prendre $x \in E$,

$$x \in F+G \Leftrightarrow \exists (x_F, x_G) \in F \times G \,/\, x=x_F+x_G \Leftrightarrow \ldots$$

dans ce cas on obtient souvent un système dont il s'agit de prouver l'existence et l'unicité de la solution.

► Sinon, on raisonne par analyse synthèse. Prendre $x \in E$.

→ **Analyse.** Soit $(x_F, x_G) \in F \times G$, tel que $x=x_F+x_G$, alors...On doit obtenir un unique couple qui convient, l'unicité est prouvée.

→ **Synthèse.** On vérifie que le couple (x_F, x_G) satisfait bien $x=x_F+x_G$.

Exercice.

1) Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $F=\operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ où $\varepsilon_1=(1,-1)$ et $F=\operatorname{Vect}(\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_2=(2,-3)$.
Montrer que$F$ et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F=\operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ où $\varepsilon_1=(1,-1,0)$ et $G=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x-y+z=0\}$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3) Dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $F=\{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \widetilde{P}(1)=0 \text{ et } \widetilde{P}(2)=0.\}$. Montrer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

4) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on pose $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les ensembles des fonctions paires et impaires respectivement. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

5) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (matrices symétriques) et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (matrices antisymétriques) sont supplémentaires.

Théorème (Une application linéaire est déterminée par ses restrictions à une somme directe)

On suppose que $E=E_1 \oplus E_2$ et soient $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$.
Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $f_{|E_1}=f_1$ et $f_{|E_2}=f_2$.
Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des sev supplémentaires.

II.6 Projecteur ou projection

Soient E_1 et E_2 deux sev supplémentaires dans E : $E_1 \oplus E_2 = E$.
Alors tout $x \in E$ admet un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
Le **projecteur** p (ou la **projection**) sur E_1 parallèlement à E_2 est défini par:

$$p : \begin{array}{ccc} E = E_1 \oplus E_2 & \to & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array}.$$

On rappelle les propriétés de p :

1) $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$

2) $\operatorname{Im} p = E_1$ et $\operatorname{Ker} p = E_2$

3) $E_1 = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ c'est-à-dire: $\forall x \in E, \quad x \in E_1 \Leftrightarrow p(x) = x$.
Ainsi E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p.

4) $q = \operatorname{Id}_E - p$ est la projection sur E_2 parallèlement à E_1. q est appelé le **projecteur associé** à p.

Théorème (Caractérisation des projecteurs)

Soit $\boxed{p \in \mathcal{L}(E)}$. Alors:

$$p \text{ projecteur } \Leftrightarrow p \circ p = p.$$

Dans ce cas $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Exercice.

1) Dans $\mathbb{R}^2$ on pose $E_1 = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ et $E_2 = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1, -1)$ et $\varepsilon_2 = (2, 1)$. Déterminer l'expression de la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

2) Dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $E_1 = \mathbb{R}_1[X]$ et $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \widetilde{P}(1) = \widetilde{P}(2) = 0\}$. Déterminer l'expression de la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

3) Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (4x - 6y, 2x - 3y) \end{array}$. Montrer que p est un projecteur et en déterminer les éléments caractéristiques.

II.7 Symétries

Soient E_1 et E_2 deux sev supplémentaires dans E : $E_1 \oplus E_2 = E$.
Alors tout $x \in E$ admet un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
La **symétrie** p par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est définie par:

$$p : \begin{array}{ccc} E = E_1 \oplus E_2 & \to & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array}.$$

On rappelle les propriétés de s :

1) $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et donc s est bijective avec $s^{-1} = s$

2) $\mathrm{Im}\, s = E$ et $\mathrm{Ker}\, s = \{0_E\}$

3) $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$, $\quad E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ $\quad$ c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \qquad x \in E_1 \Leftrightarrow s(x) = x, \qquad x \in E_2 \Leftrightarrow s(x) = -x.$$

Ainsi E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants et E_2 est l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé.

4) $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ où p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Théorème (Caractérisation des symétries)

Soit $\boxed{s \in \mathcal{L}(E)}$. Alors:

$$s \text{ symétrie } \Leftrightarrow s \circ s = \mathrm{Id}_E\,.$$

Dans ce cas $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice.

1) Dans $\mathbb{R}^2$ on pose $E_1 = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1, -1)$ et $\varepsilon_2 = (2, 1)$. Déterminer l'expression de la symétrie sur E_1 parallèlement à E_2.

II.8 Nouveauté PC - Somme de n sous-espaces vectoriels

Théorème-Définition (Nouveauté PC - Somme d'un nombre fini de sev)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

- On définit la **somme** de $E_1, \ldots, E_n$ par:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = E_1 + \cdots + E_n = \{x_1 + \cdots + x_n \,/\, (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n\}.$$

  C'est un sev de E contenant les espaces vectoriels E_i.

- Cette somme est qualifiée de **somme directe** si tout vecteur de $E_1 + \cdots + E_n$ s'écrit de manière unique comme somme d'éléments de $E_1, \ldots, E_n$.

  On note alors $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ au lieu de $E_1 + \cdots + E_n$.

- Lorsque $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$, on dit que $E_1, \ldots, E_n$ sont **supplémentaires** dans E.

Théorème (Nouveauté PC - Caractérisation de la somme directe.)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. La somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si et seulement si :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad x_1 + \cdots + x_n \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = 0_E.$$

Autrement dit, une somme de sev est directe si et seulement si le vecteur nul a une unique décomposition.

Remarques

Il n'existe pas de critère simple pour qu'une somme de $n \geqslant 3$ sev est directe. Ou bien on justifie l'unicité de la décomposition directement, on bien on fonction de proche en proche en proche.
Par exemple pour prouver que $E_1 + E_2 + E_3$ est une somme directe, il faut prouver successivement les égalités :

- $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ qui prouve $E_1 + E_2$ est une somme directe
- $(E_1 \oplus E_2) \cap E_3 = \{0_E\}$ qui prouve $(E_1 \oplus E_2) + E_3$ est une somme directe

III Espaces vectoriels et sev de dimension finie

III.1 Définitions et première propriétés

Théorème (Théorème de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev différent de $\{0_E\}$ de dimension finie.
Toute famille libre finie de E peut-être complétée en une base de E.

✎ **En pratique** ✎ Ce théorème est souvent utilisée pour, à partir d'une base d'un sous-espace vectoriel F de E, la compléter en une base de E. Une telle base dont les premiers vecteurs sont une base de F est dite base de E **adaptée** à F.

Théorème-Définition (Dimension d'un espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Si $E \neq \{0_E\}$, toutes les bases de E possèdent le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la **dimension** de E, notée $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou plus simplement $\dim E$ (s'il n'y a pas ambiguité).
Par convention $\dim\{0_E\} = 0$.

Exemples

1) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} =$ $\qquad$ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =$
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n =$
3) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dim \mathbb{K}_n[X] =$
4) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{np})(\mathbb{K}) =$
5) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + z = 0\}$, $\dim_{\mathbb{R}} E =$
6) Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in E$ avec $u \neq 0_E$, $F = \mathrm{Vect}(u)$ alors $\dim_K F =$
7) L'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension
8) L'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension

Théorème (Nombre d'éléments d'une famille libre/génératrice)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$.

1) Toute famille libre de E possède au plus n éléments
2) Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.
3) **Caractérisation des bases**. Soit $\mathcal{B}$ une famille de $\boxed{n = \dim E \text{ vecteurs}}$. Alors:

$$\mathcal{B} \text{ base } \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ libre } \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ génératrice .}$$

Exemples

1) Montrer que $((1, 1), (1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2) La famille $((X - a)^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Coordonnées d'un polynôme P dans cette base?
3) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right)$ est une base $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Théorème (Nouveauté PC - Dimension de $E_1 \times \cdots \times E_n$)

Soient $E_1, \ldots, E_n$ n espaces vectoriels de dimension finie alors

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i.$$

III.2 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Théorème (Caractérisation des supplémentaires par base adaptée)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F et G deux sev de E de bases respectives $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$, alors

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G \text{ est une base de } E.$$

Corollaire (Existence de supplémentaires)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors:

- F admet au moins supplémentaire dans E.
- De plus tous les supplémentaires de F sont de dimension $\dim E - \dim F$.
  On retiendra si $F \oplus G = E$ alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

Théorème ($\dim(F+G)$: formule de Grassmann)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E **de dimension finie**. Alors $F+G$ est de dimension finie et

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

Exercice. Soit E un ev de dimension 3 et F, G deux plan vectoriels de E non confondus. Montrer que $F+G=E$.

Corollaire (Caractérisation des supplémentaires)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F + G = E \end{cases}.$$

Exercice Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on pose les trois sev suivants

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \quad G = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad H = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/P(X) = P(-X)\}.$$

1) Déterminer les dimensions de F, G, H.
2) Montrer que $F \oplus G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,/\, P(1) = P(2) = 0\}$.
3) Montrer que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}_3[X]$.

III.3 Nouveauté PC - Somme de n sous-espaces vectoriels

Théorème (Nouveauté PC - Dimension d'une somme d'un nombre fini de sev)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.
Alors $E_1 + \dots + E_p$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Théorème (Nouveauté PC - Concaténation de bases - Partition d'une base)

- Soient $E_1, \dots, E_p$ p sous-espaces supplémentaires dans E de dimension finie.
La concaténation de bases de $E_1, \dots, E_p$ donne une base de E, dite base adaptée à la décomposition $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$.

- Réciproquement, à partir d'une base de E on peut obtenir une décomposition en somme directe de E en fractionnant cette base.
Par exemple si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors avec $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$, en posant
$$H_1 = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) \qquad H_2 = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_q) \qquad H_3 = \operatorname{Vect}(e_{q+1}, \dots, e_n).$$
alors
$$E = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3.$$

IV Matrice d'une application linéaire

Définition (Matrice d'une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\dim E = p$, $\dim F = n$ de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** notée $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ la matrice de la famille famille de vecteurs $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ i.e.
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_j) & & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix}.$$
Les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ sont données par $f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$.

- Si $E = F$ et si $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est notée $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exemples

1) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - 2y + z, 3x + 4y) \end{array}$. Déterminer la matrice de f relativement aux bases :

   -a- $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$

   -b- $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ et $\mathcal{C}' = ((1,0),(1,1))$

2) Soit $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. Déterminer la matrice de D relativement aux bases canoniques $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$.

3) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P'(1), P(0), P(-1)) \end{array}$. Déterminer la matrice de φ relativement aux bases canoniques $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

4) Déterminer la matrice de l'endomorphisme Id_E relativement à une base $\mathcal{B}$ de E.

Très important - Application linéaire canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

C'est l'unique application linéaire telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer l'application linéaire f canoniquement associée à A.

Exercice. Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et F, G deux sev supplémentaires dans E.
Soit p la projection sur F parallèlement à G. On pose $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_F$ une base de E où $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de F et G.
Déterminer la forme de la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. Cette **base est dite adaptée à p.**
Même question avec la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Théorème (Lien calcul vectoriel et calcul matriciel)

1) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
   Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

2) Soient E_1, E_2, E_3 trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$.
   Soient $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $g \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$.
   Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f).$$

Théorème (Bijectivité et inversibilité)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors:

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \text{ est inversible.}$$

Dans ce cas,

$$\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right).$$

V Nouveauté PC - Sous-espaces stables

V.1 Nouveauté PC - Matrices définies par blocs

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et deux entiers r, s tels que $1 \leqslant r \leqslant n-1$, $1 \leqslant s \leqslant p-1$.
On peut diviser la matrice A en quatre blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} A_1 \text{ de format } (r,s) & A_2 \text{ de format } (r, p-s) \\ A_3 \text{ de format } (n-r, s) & A_4 \text{ de format } (n-r, p-s). \end{cases}$$

La matrice est dite définie par blocs.

Sous réserve que le découpage soit identique, la définition par blocs est compatible avec les combinaisons linéaires

$$\text{si } A' = \begin{pmatrix} A_1' & A_2' \\ A_3' & A_4' \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \lambda A + A' = \begin{pmatrix} \lambda A_1 + A_1' & \lambda A_2 + A_2' \\ \lambda A_3 + A_3' & \lambda A_4 + A_4' \end{pmatrix}.$$

Et même compatible avec la multiplication, sous réserve que tous les produits de matrices soient licite :

$$\text{si } B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}) \quad \text{alors} \quad \lambda AB = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_1 B_1 + A_2 B_3 & \lambda A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ \lambda A_3 B_1 + A_4 B_3 & \lambda A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}).$$

Les matrices se multiplient entre elles comme si les blocs étaient des scalaires, à condition que chaque multiplication de matrices soit licite.

La transposition d'une matrice par blocs donne

$$A^\top = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} A_1^\top & A_3^\top \\ A_2^\top & A_4^\top \end{pmatrix}.$$

Définition (Matrices diagonales/triangulaire par blocs)

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale par blocs lorsqu'elle est de forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{pmatrix} \text{ où les } A_{ii} \text{ sont des matrices carrées, le reste est nul.}$$

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure par blocs lorsqu'elle est de forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{kk} \end{pmatrix} \text{ où les blocs diagonaux sont carrés et les blocs sous-diagonaux sont nuls.}$$

Théorème (Produit de matrice diagonale par blocs)

- Le produit de matrices diagonales par blocs est une matrice diagonale par blocs, plus précisément :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & & & \\ & A_{22}B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk}B_{kk} \end{pmatrix}$$

- Conséquence :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} A_{11}^p & & & \\ & A_{22}^p & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk}^p \end{pmatrix}.$$

V.2 Nouveauté PC - Interprétation des sous-espaces stables à l'aide de matrices blocs

Définition (Sous-espaces stables)

Soient F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in F, \quad f(x) \in F.$$

Remarques (Endomorphisme induit)

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
On suppose que F est stable par f, on peut alors définir un endomorphisme en restreignant f à F,

$$f_{|F}: \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

que l'on appelle endomorphisme induit par f sur F.

Propriétés (Caractérisation de la stabilité par l'image d'une famille génératrice)

Soient F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice (ou une base) de F. Alors

$$F \text{ stable par } f \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(e_i) \in F.$$

Exemple On pose pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = X^2P' - 2XP$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par f.

Théorème (Stabilité du noyau/image par un endomorphisme qui commute)

Soient f et g deux endomorphismes de E. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Théorème (Stabilité et matrice par blocs dans une base adaptée)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit F un sev de E de dimension r et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F (les premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs d'une base de F). Alors

$$F \text{ stable par } f \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-r,r} & C \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{K}).$$

Exemple Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans la base (e_1, e_3, e_2).

Exemple Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 5. On suppose que $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$, $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ stables par f.

1) Soit $\mathcal{B}_1$ une base adaptée à $\mathrm{Ker}\, f$ (les premiers vecteurs de $\mathcal{B}_1$ sont les vecteurs d'une base de $\mathrm{Ker}\, f$). Donner la forme de la matrice de f dans $\mathcal{B}_1$.

2) Soit $\mathcal{B}_2$ une base adaptée à $\mathrm{Im}\, f$ (les premiers vecteurs de $\mathcal{B}_2$ sont les vecteurs d'une base de $\mathrm{Im}\, f$). Donner la forme de la matrice de f dans $\mathcal{B}_2$.

Théorème (Caratcérisation de la stabilités d'espaces supplémentaires)

Soient E est un espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_k$ supplémentaires dans E : $E = E_1 \oplus \cdots E_k$. On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette décomposition (c'est-à-dire une concaténation de bases des E_i). Alors chaque E_i est stable par un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si la matrice associée à f dans cette base est diagonale par blocs

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{pmatrix}.$$

Les matrices A_{ii} sont les matrices des endomorphismes induits $f_{|E_i}$ dans la base de E_i qui apparaît dans $\mathcal{B}$.

Exemple Tout projecteur p et toute symétrie s a une matrice diagonale dans une base adaptée à une décomposition d'espaces supplémentaires remarquables.

VI Rang d'une famille de vecteur, d'une application linéaire, d'une matrice

VI.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie) et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. On appelle **rang** de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $(u_1, \ldots, u_n)$ noté

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n) = \dim \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n).$$

Théorème (Propriétés du rang)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

1) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{F})$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim E$.

2) **Caractérisation des familles libres/génératrices avec le rang** :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ libre} \qquad \mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim E \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ engendre } E\,.$$

3) **Caractérisation des bases avec le rang** :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \dim E.$$

VI.2 Rang d'une matrice

Définition (Rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le **rang** de A, noté $\mathrm{rg}(A)$ est le rang de la famille des vecteurs-colonnes de A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ i.e.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p) \qquad \text{où } A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{array}\right).$$

Propriétés (sur le rang d'une matrice)

1) Le rang d'une matrice échelonnée par colonnes est égale au nombre de colonnes non nulles.
2) On ne modifie pas le rang d'une matrice en effectue une opération élémentaire sur les colonnes (échange, dilatation, transvection).

✎ Méthode pratique ✎ (Comment calculer le rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour calculer $\mathrm{rg}\, A$.
Quelques trucs pour aller vite :

- si la matrice est échelonnée par colonnes le rang est égal au nombre de colonnes non nulles
- si une colonne est combinaison linéaire des autres colonnes on peut la retirer dans le calcul de rang
- si la matrice ne comporte que deux colonnes non proportionnelles alors le rang vaut 2

Sinon, la méthode systématique qui doit être appliquée :

- ▶ on échelonne A par colonnes.
- ▶ le rang de A est alors le nombre de colonnes non nulles de la matrice échelonnée.

Exercice. Calculer le rang des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Théorème (Rang d'une famille = rang d'une matrice)

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie de base $\mathcal{B}$ et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E. On note C_i la matrice des coordonnées de u_i dans la base $\mathcal{B}$ aalors

$$\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{array}\right).$$

✎ Méthode pratique ✎ (Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs)

- ▶ On pose la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs **dans une base bien choisie**.
- ▶ On calcule le rang de cette matrice.

Exercice.

1) Dans $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (1, -1, 2)$, $u_2 = (2, 0, 3)$, $u_3 = (1, 2, 3)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (à l'aide du rang).
2) Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = X^2 - 2X + 3$, $P_2 = 3X + 4$, $P_3 = 2X^2 - 4X + 5$, $P_4 = X^2 - 1$. Calculer $\mathrm{rg}(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

VI.3 Rang d'une application linéaire

Théorème-Définition (Application de rang fini)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On dit que f est de **rang fini** lorsque $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et on définit le **rang** de f comme la dimension de l'image de f noté

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f.$$

Cas particulier :

- si E est de dimension finie alors f est de rang fini et $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E$
- si F est de dimension finie alors f est de rang fini et $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim F$.

Théorème (Conservation du rang par composition par un isomorphisme)

On ne modifie pas le rang d'une application lorsqu'on la compose par un isomorphisme. En clair avec des notations évidentes :

- Si f est un isomorphisme alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$
- Si g est un isomorphisme alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.

Théorème (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\boxed{E \text{ de dimension finie}}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

1) f définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E sur $\operatorname{Im} f$
2) $\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f \text{ c'est-à-dire } \operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f}$.

Exercice.

1) Déterminer une base de l'image et une base du noyau de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y + z, 2x + y + z, -3y + z) \end{array}$.
2) Déterminer une base de l'image et une base du noyau de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$.

Théorème (Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité à l'aide du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors:

1) f est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim F$
2) f est injective $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim E$
3) f est bijective $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim E = \dim F$.

Corollaire (Caractérisation des isomorphismes en dimension finie)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On suppose $\boxed{\dim E = \dim F}$, alors

$$f \text{ bijective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \textbf{ ou } f \text{ injective }.$$

Exercice.

1) Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, 2x+y+z, y) \end{array}$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$

2) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel $P' + P = Q$.

VI.4 D'autres résultats matriciels

Théorème (Caractérisations des matrices inversibles)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible
2) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$ ($AB = I_n$ *suffit*)
3) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$ ($BA = I_n$ *suffit*)
4) $\operatorname{Ker} A = \{0_n\}$ c'est-à-dire que l'équation $AX = 0_{n1}$ admet pour seule solution la solution nulle
5) $\operatorname{rg} A = n$.

Exercice.

1) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A + 3I_n = 0_n$. *On dit que le polynôme* $P = X^3 - 3X^2 + 2X + 3$ *est annulateur de* A. Montrer que A est inversible et exprimer l'inverse de A à l'aide de puissances de A.

2) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ telle $A - \lambda I_3$ est inversible.

Théorème (Propriétés du rang d'une matrice)

1) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
$$\operatorname{rg}(A) \leqslant \min(n,p).$$
2) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$$\forall P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg}(AP) = \operatorname{rg}(A) \qquad \forall Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg}(QA) = \operatorname{rg}(A).$$
Autrement dit, on ne modifie pas le rang d'une matrice si on la multiplie par une matrice inversible.

VII Changement de base

Définition (Matrice de passage)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** la matrice notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ i.e. si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e'_1 & \dots & e'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & p_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}.$$

Exemples Dans $\mathbb{R}^3$ soient $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}'$ la base $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$. Alors

$$\begin{cases} e_1' = e_1 \\ e_2' = e_1 + e_2 \\ e_3' = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}.$$

$$\begin{cases} e_1 = e_1' \\ e_2 = e_2' - e_1' \\ e_3 = e_3' - e_2' \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array}.$$

⚠ **Attention** ⚠ À l'ordre des bases: $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \neq P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ en général.

Exercice. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ vers la base $\mathcal{B}' = (3, 2X+4, X^2-2X+1)$.

Un résultat très important :

Théorème (Formule de changement de base)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux bases de F. On pose les matrices de passage $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$.

1) **Version coordonnées**: soit $x \in E$.
   Si $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ alors: $X = PX'$.
2) **Version application linéaire**: soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
   Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$ alors: $A' = Q^{-1}AP$.
3) **Version endomorphisme**: soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
   Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ alors: $A' = P^{-1}AP$.

Définition (Matrices semblables)

Soit A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et A' sont **semblables** s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible telle que

$$A' = P^{-1}AP.$$

Remarques

- Deux matrices sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.
- Deux matrices semblables ont même rang.

Exercice.

1) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r est semblable à une matrice de la forme $(M \,|\, 0)$ où $M \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.
2) Montrer que les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.
3) Montrer que les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Méthode pratique (Calcul de A^n)

- On montre que A est semblable à une matrice B plus simple (souvent diagonale, à défaut triangulaire), alors $B = P^{-1}AP$ donc $A = PBP^{-1}$.
- Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$ (qui se montre par une récurrence immédiate).
- On calcule B^n (qu'on espère simple, c'est le cas si B diagonale) on déduit alors A^n.

Exercice important. Diagonalisation Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On veut calculer les itérées A^n où $n \in \mathbb{N}$ de la matrice A.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A i.e. $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soient $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, -2)$.

1) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice D de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
3) Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
4) Après voir exprimé A en fonction de P, D et P^{-1}. Calculer A^n.

VIII Nouveauté PC - Trace

Définition (Trace)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de la matrice A, notée $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Théorème (Propriétés de la trace)

1) **Linéarité** Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\quad \mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B)$.
2) **Trace d'un produit** Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
3) **Trace d'une transposée** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad \mathrm{Tr}(A^\top) = \mathrm{Tr}(A)$.
4) **Matrices semblables** Deux matrices semblables ont même trace.

⚠ **Attention** ⚠ La réciproque de 4) est fausse. Contrexemple :

Définition (Trace d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
La trace de la matrice de f est indépendante de la base choisie. Cette valeur commune est appelée **la trace de l'endomorphisme** f et est notée $\mathrm{T}r(f)$.

Propriétés (de la trace d'un endomorphisme)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

1) **Linéarité**. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{T}r(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{T}r(f) + \mu \mathrm{T}r(g)$.
2) **Trace d'une composée**. $\mathrm{T}r(f \circ g) = \mathrm{T}r(g \circ f)$

IX Déterminant

IX.1 Déterminant d'une famille de n vecteurs

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Le déterminant dans la base $\mathcal{B}$, noté $\det_{\mathcal{B}}$, est l'unique forme n-linéaire alternée sur E^n valant 1 sur $\mathcal{B}$ c'est-à-dire

- $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables
- si deux au moins des x_i sont égaux alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$
- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Propriétés (Lien entre les déterminants)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ une base de E, alors
$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}.$$

Théorème (Caractérisation des bases à l'aide du déterminant)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors
$$\mathcal{F} \text{ base de } E \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0.$$

IX.2 Déterminant d'un endomorphisme

Soient φ un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Le nombre
$$\det_{\mathcal{B}}(\varphi(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$
est indépendant de la base choisie, ce nombre est noté $\det(\varphi)$ et est appelé **le déterminant de** φ.

✎ **En pratique** ✎ Comme $\det(\varphi)$ est indépendant de la base choisie, on choisit pour le calcul une base qui nous convient le mieux.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $u = (1, 2)$ et $v = (3, -1)$ et s la symétrie par rapport $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(v)$.
Déterminant le déterminant de s.

Propriétés (du déterminant d'un endomorphisme)

Soient φ et ψ deux endomorphismes de E.

1) $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$
2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda\varphi) = \lambda^n \det(\varphi)$
3) $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \det(\psi)$.

Et une nouvelle caractérisation des automorphismes de E.

Théorème (Caractérisation des automorphismes à l'aide du déterminant)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Alors :
$$\varphi \in \mathrm{GL}(E) \Longleftrightarrow \det(\varphi) \neq 0.$$
Dans ce cas :
$$\det(\varphi^{-1}) = \frac{1}{\det(\varphi)}.$$

⚠ **Attention** ⚠ Le déterminant n'est pas linéaire. En général $\det(\varphi + \psi) \neq \det(\varphi) + \det(\psi)$.

IX.3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition (Déterminant d'une matrice carrée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le **déterminant de** A, noté $\det A$, est le déterminant dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ de la famille des colonnes de A.
En notant a_{ij} les coefficients de A, le déterminant est notée sous forme de tableau

$$\det A \quad = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Remarques (Les trois notions de déterminants coincident)

$$\det(A) = \det(f) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ où } A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}).$$

Théorème (Propriétés du déterminant d'une matrice)

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

1) **Caractérisation de l'inversibilité**. A est inversible $\iff \det(A) \neq 0$.
   Dans ce cas : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

2) **Déterminant d'un produit**. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

3) **Transposée**. $\det(A^\top) = \det(A)$.

Théorème (Opérations sur les colonnes/lignes)

1) On ne modifie pas la valeur du déterminant si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

2) Le déterminant est multiplié par λ si une colonne est multiplié par λ.

3) Le déterminant change de signe si on échange deux colonnes.

4) Le déterminant est inchangé si on fait subir aux colonnes une permutation paire.

5) Le déterminant change de signe si on fait subir aux colonnes une permutation impaire.

6) $\det(\lambda A) =$ si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in$

NB : comme la transposition échange les lignes et les colonnes alors les opérations précédentes sont valables en remplaçant colonnes par lignes.

Propriétés (Déterminant de forme particulière)

- **Ordre 2.** $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$
- **Ordre 3** : règle de Sarrus. $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ac'b'' - ba'c''.$
- **Matrice triangulaire** Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux.
- **Matrice diagonale** Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments diagonaux.
- **Nouveauté PC** - **Déterminants par blocs** Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B) \qquad \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$$

Exercice. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

Définition (Cofacteurs)

Soit Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- On note m_{ij} le déterminant de format $(n-1, n-1)$ obtenu en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne de Δ. m_{ij} est appelé le **mineur relatif à** a_{ij}.
- On appelle **cofacteur** de Δ relatif à a_{ij}, le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.

Théorème (Développement d'un déterminant par rapport à une ligne/colonne)

Soit Δ le déterminant
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1) Développement par rapport à la j-ième colonne : $\quad \Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}.$

2) Développement par rapport à la i-ième ligne : $\quad \Delta = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}.$

✎ Méthode pratique ✎ (Stratégies de calcul de déterminant)

Voici quelques stratégies pour calculer efficacement un déterminant.

- Faire apparaître des 0 en utilisant des transvections afin de développer plus facilement.
- Faire apparaître des facteurs sur les lignes ou les colonnes et exploiter la n-linéarité.
- Développer selon une ligne ou une colonne qui contient un maximum de 0.

Exercice.

1) Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

2) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ et en donner une forme factorisée.

3) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}_{[n]}.$

4) Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{[n]}.$

5) On pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$. Etablir une relation de récurrence vérifiée par Δ_n, en déduire Δ_n.

6) **Déterminant tridiagonal**. On pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]}$. Exprimer Δ_{n+2} en fonction de Δ_{n+2} et Δ_{n+1}.

En déduire Δ_n.

Théorème-Définition (Nouveauté PC - Déterminant de Vandermonde)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **déterminant de Vandermonde**, tout déterminant de la forme

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \text{où } (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Alors,

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Exemple Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Donner une forme factorisée de $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

X Nouveauté PC - Interpolation de Lagrange

Objectif : soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $y_0, \dots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. On cherche un polynôme P tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$ (c'est le problème de l'interpolation).

Exemple Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 0$ et $P(2) = 1$.

Théorème (Existence et unicité)

Avec les notations ci-dessus, il existe un **unique** polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré **au plus** n tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$

Deux démonstrations :

1) avec l'isomorphisme $P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$

2) avec le déterminnt de Vandermonde

On cherche tout d'abord, pour $i \in [\![0, n]\!]$ les polynômes L_i de degré n vérifiant :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad \text{où } \delta_{ij} \text{ est le symbole de Kronecker}$$

c'est-à-dire

$$L_i(x_i) = 1 \qquad \forall j \in [\![0, n]\!],\ j \neq i, \qquad L_i(x_j) = 0.$$

Théorème-Définition (Bases de Lagrange)

- On appelle polynômes interpolateurs de Lagrange aux abscisses $x_0, \dots, x_n$ les polynômes $L_0, \dots, L_n$ définis par :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \qquad L_i =$$

- Alors $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.

Théorème (Expression du polynôme d'interpolation)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $y_0, \dots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$.

1) L'unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré **au plus** n tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$ est :

$$P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i =$$

2) Les polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $Q(x_i) = y_i$, sont les polynômes :

$$Q = P + \prod_{i=0}^{n} (X - x_i) \times S$$

où $S \in \mathbb{K}[X]$ et P le polynôme défini dans 1).

Exemple Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 2$, $P(1) = 4$ et $P(2) = 3$.