Chapitre
Fonctions intégrables

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Définitions

Définition (Intégrale absolument convergente)

Soient I un intervalle de bornes a, b finies ou non avec $a < b$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Théorème (Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence)

Soient I un intervalle de bornes a, b finies ou non avec $a < b$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente alors elle est convergente, de plus

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

⚠ **Attention** ⚠ La réciproque est fausse. Contre-exemple :

Définition (Fonction intégrable)

Soit I un intervalle.
Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite **intégrable** sur I si :

- f est continue par morceaux
- son intégrale est absolument convergente.

Dans ce cas son intégrale sur I est notée $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_I f$.
Notation : l'ensemble des fonctions intégrables sur I est noté $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.

NB : si la fonction est positive l'intégrabilité de f est équivalente à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.
Terminologie : lorsque $I = [a, b[$ (b fini ou non), si f est intégrable sur I on dit aussi que f est **intégrable en** b.

II Propriétés et intégrabilités usuelles

Théorème (Espace vectoriel $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$)

- $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.
- L'application $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}) \mapsto \displaystyle\int_I f$ est une forme linéaire.

Théorème (Nullité de l'intégrale pour les fonctions positives)

Soient I un intervalle non réduit à un point et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ **continue** et **positive** sur I.
Si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors f est la fonction nulle (f est identiquement nulle).

Théorème (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème (Fonctions exponentielles)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Théorème (Fonction logarithme)

$t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$.

Remarques (Intégrabilité et translation)

La fonction f est intégrable en a^+ (respectivement b_-) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (respectivement $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0^+

Théorème (Intégrales de Riemann translatées)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$

- $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable en a^+ si et seulement si $\alpha < 1$.
- $t \mapsto \dfrac{1}{(a-t)^\alpha}$ est intégrable en a^- si et seulement si $\alpha < 1$.

On peut utiliser les intégrales généralisées dans la méthode de comparaison série-intégrale.

Exercice Utiliser une comparaison série-intégrale pour déterminer un équivalent du reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

III Comparaisons

Théorème (Comparaison)

Soient I un intervalle $[a, b[$ où b est fini ou non et $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux.

1) Si $|f| \leqslant |g|$ alors l'intégrabilité de g entraîne celle de f.
2) Si au voisinage de b, $f(x) = \mathrm{o}_b(g(x))$ alors l'intégrabilité de g entraîne celle de f.
3) Si au voisinage de b, $f(x) = \mathrm{O}_b(g(x))$ alors l'intégrabilité de g entraîne celle de f.
4) Si au voisinage de b, $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$ alors l'intégrabilité de g **équivaut** à celle de f.

NB: dans le cas où f et g sont positives, on peut adapter le théorème pour prouver la convergence des intégrales. On remplace "intégrabilité de la fonction h" par "convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b h$".

Exemples

1) Montrer que $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
2) **Savoir refaire** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente.

⚠ **Attention** ⚠ Bien maîtriser le vocabulaire : existence d'une intégrale, convergence d'une intégrale, intégrabilité d'une fonction sur un intervalle, intégrabilité d'une fonction en un point (voir les différences et les points communs).

Exemples

1) Justifier l'existence/justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
2) Justifier l'existence/justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
3) Montrer que la fonction $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
4) Déterminer l'ensemble de définition de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
5) Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$.
6) **Un classique : quelques intégrales de Bertrand.** Justifier la convergence de

   -a- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$ -b- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ -c- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^{1/3}}\,\mathrm{d}t$. -d- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. -e- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Exemple **À connaître : la fonction** Γ. On pose $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le domaine de définition de Γ.
2) Déterminer pour $x > 0$ une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.
3) Déterminer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.