Dénombrement

Exercice 1. (♡) Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20:

- 8 boules blanches numérotées de 1 à 8
- 12 boules noires numérotées de 9 à 20.

1) On tire simultanément 5 boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
   -a- A : "on tire au moins une noire"
   -b- B : "on ne tire que des numéros pairs"
   -c- B : "on tire exactement 2 boules blanches et 3 boules noires"
2) On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise. Mêmes questions.
3) On tire successivement 5 boules de l'urne avec remise. Mêmes questions.

Exercice 2. (♡) On distribue 8 cartes d'un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité d'avoir:

1) exactement 2 coeurs et 1 valet
2) au moins 1 coeur et au moins 1 valet
3) exactement 2 coeurs et au moins 1 valet.

Exercice 3. ($**$) Une puce part de $O(0,0)$ et à chaque saut de déplace de façon équiprobable d'une unité vers le haut, le bas, la gauche, la droite.
Quelle est la probabilité que la puce se retrouve au point O après n sauts ?
Donner un équivalent de cette probabilité en $+\infty$ lorsque n est pair.
Indication : On a besoin de l'égalité $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}^2=\binom{2n}{n}$ *qu'on pourra redémontrer par un argument combinatoire*

Probabilités conditionnelles

Exercice 4. (♡♡) Un rat se trouve dans un labyrinthe face à quatre portes dont une seule conduit à la sortie. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une légère décharge électrique et revient à son point de départ.
On pose N le nombre d'essais utilisés pour trouver la bonne porte. On envisage successivement trois hypothèses.

1) Le rat a une mémoire parfaite. À chaque nouvel essai, il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et choisit au hasard parmi les restantes.
2) Le rat a une mémoire immédiate. À chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte de l'essai précédent et choisit au hasard parmi les trois autres.
3) Le rat n'a pas de mémoire. Il choisit à chaque essai de façon équiprobable l'une des portes.

Pour chacune de ces hypothèses, définir la loi de N.
Il peut être judicieux d'introduire les événements S_k :"la porte de sortie est choisie au k-ième essai".

Exercice 5. (♡♡) On dispose d'un lot de 100 dés dont on sait que 25 sont truqués. Pour un dé truqué la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{2}$.
On choisit un dé dans le lot.

1) On lance le dé choisi une fois. On obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé choisi soit truqué?
2) On lance le dé choisi n fois. On obtient toujours 6. Quelle est la probabilité p_n que le dé soit truqué? Déterminer la limite de (p_n). Surprenant?

Exercice 6. (♡♡) On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile soit de $\frac{1}{3}$:

- si on obtient pile on décide de jouer uniquement avec le dé A
- si on obtient face on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1) Calculer la probabilité d'obtenir rouge au premier coup.
2) On a obtenu rouge aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième coup.
3) On a obtenu rouge aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A. Déterminer la limite de (p_n). Surprenant?

Exercice 7. (♡♡) On dispose d'une infinité d'urnes numérotées par les entiers strictement positifs. Pour chaque entier $n > 0$, l'urne numéro n contient 5^n boules, dont n sont blanches. On réalise l'expérience suivante :

- on lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention de la face 6 . On note n le nombre de lancers nécessaires à l'obtention de cette face
- on tire alors une boule dans l'urne numéro n.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche lors de cette expérience?
2) Après réalisation de l'expérience, on constate qu'on a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité que celle-ci ait été tirée dans l'urne numéro n ?

Exercice 8. (♡♡) Un message binaire (0 ou 1) est émis par E_0, puis retransmis par E_1, puis $E_2 \ldots$ et arrive enfin à E_n. À chaque transmission, le message retransmis est le message reçu avec probabilité $p \in]0,1[$. On note a_k la probabilité que le message reçu par E_k soit le message initial.

1) Calculer a_k en fonction de a_{k-1} pour $k \geqslant 1$.
2) Calculer a_n en fonction de n et de p. Quelle est la limite de a_n lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 9. ($*$) Trois opérateurs de téléphonie mobile A, B, C possèdant un tiers du marché, mettent en place une nouvelle offre de forfait. A la fin de l'année, l'évolution des parts de marché se fait de la manière suivante:

- les clients de A se répartissent indifféremment de façon équiprobable entre A et B et C
- les clients de B restent chez B
- les clients de C seront chez A, B, C avec probabilités respectives $\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{3}$.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n, c_n les probabilités pour qu'à l'issue de la n-ième année un consommateur décide de s'abonner chez A, B ou C.

1) Déterminer une relation de récurrence entre a_n, b_n, c_n et a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}. On pourra introduire les événèments A_n (resp. B_n et C_n), "à l'issue de la n-ième année le consommateur décide d'être client de A“ (resp B, C).
2) En déduire le terme général des suites (a_n), (b_n), (c_n) en fonction de n, puis les limites de ces suites. On montrera que les suites (a_n) et (c_n) vérifient une relation de récurrence double.

Variables aléatoires

Exercice 10. (♡) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ défini par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
Montrer que X est bien une variable aléatoire puis calculer les probabilités des événemnts $(X \geqslant 10)$ et (X impair).

Exercice 11. (♡♡) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ $(n \geqslant 2)$ dont la loi est donnée par : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X=k) = \alpha(k^3 - k)$. Déterminer α.

Exercice 12. (♡♡) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P([X=n+1]) = \frac{4}{n} P([X=n])$$

1) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P([X=n])$ en fonction de $P([X=1])$ et n.

2) En déduire $P([X=1])$ puis la loi de X.

D'autres exercices (description d'événements, continuité monotone...)

Exercice 13. (♡♡) L'urne U, au contenu évolutif, contient au départ 1 boule blanche et $n-1$ boules noires ($n \geqslant 2$). On effectue des tirages successifs de la façon suivante:

- si au k-ième tirage on tire la boule blanche, on s'arrête, on a gagné;
- si au k-ième tirage on tire une boule noire, alors on remet la boule noire dans l'urne, on ajoute une boule noire en plus dans l'urne U et on procède au ($k+1$)-ième tirage.

On note B_k (resp. N_k) les événements « on a effectué $k-1$ tirages sans obtenir la boule blanche, et le k-ième tirage apporte la boule blanche (resp. une boule noire) ». Après les avoir décrits, calculer les probabilités des événements suivants :

$$N_k \quad , \quad B_k \quad , \quad \bigcup_{h \leqslant k} B_h \quad , \quad \overline{B_k \cup N_k} \quad , \quad \bigcup_{h \geqslant 1} N_h \quad , \quad \bigcup_{h \geqslant 1} B_h \quad , \quad \bigcap_{h \geqslant 1} N_h .$$

Il peut être judicieux d'introduire les variables aléatoires X_k valant 1 si une boule blanche est tirée au k-ième essai et 0 sinon pour décrire les événements ci-dessus.

Exercice 14. (♡♡) Deux joueurs A et B s'affrontent à un jeu de dé 6 faces (supposé parfaitement équilibré).

- A commence la partie et lance le dé. S'il obtient 1 ou 2, A est déclaré vainqueur et la partie s'arrête.
- Sinon, B prend la main et jette le dé : s'il obtient 3,4 ou 5 , il a gagné et la partie s'arrête.
- Sinon, A prend la main et on recommence dans les mêmes conditions ...

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le résultat du n-ième lancer, A_{2n-1} l'évènement « A gagne au ($2n-1$)-ième lancer » et B_{2n} l'évènement « B gagne au $2n$-ième lancer ».

1) Soit n entier naturel non nul. Exprimer A_{2n-1} et B_{2n} à l'aide des $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, puis calculer leur probabilité.

2) Quelles sont les probabilités des évènements G_A : « A gagne», G_B : « B gagne» et H : « la partie ne s'arrête pas ».

Exercice 15. (♡♡) Un rond point possède deux entrées, A et B. Une voiture entre par l'entrée A. À chaque fois qu'elle passe devant la sortie A, elle choisit soit de continuer à tourner (avec probabilité p_A), soit de sortir. Elle a le même comportement devant la sortie B (probabilité p_B de continuer à tourner).

1) Déterminer la probabilité que la voiture sorte à la sortie B.

2) Quelle est la probabilité que la voiture tourne indéfiniment?

Exercice 16. ($*$) On lance une infinité de fois une pièce truquée : P sort avec la probabilité $p \in]0,1[$. Quelle est la probabilité d'obtenir le motif PP sans que le motif PF soit apparu avant PP?

Exercice 17. ($**$) Loi du 0-1 de Kolmogorov
On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements mutuellement indépendants.

1) Interpréter $A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\geqslant p} A_n \right)$.

2) Montrer que, si la série $\sum P(A_n)$ converge, alors $P(A) = 0$.

3) Soit (u_n) une suite de nombres réels tous compris entre 0 et 1.
   Démontrer que, pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant l$, $\prod_{i=k}^{l}(1-u_k) \leqslant \exp\left(-\sum_{i=k}^{l} u_k\right)$.
   En déduire que, si la série $\sum P(A_n)$ diverge, alors $P(A) = 1$.

4) On lance une pièce. Quelle est la probabilité qu'une infinité de fois, on obtienne deux piles successifs?