Exercice 1. ($\heartsuit$) Les intégrales suivantes sont-elles convergentes?

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3+5t^2+1}{t^4+2t^2+3t+1}\,\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ 5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ 7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ 6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{(1-t)^\alpha}\mathrm{d}t$ 8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}\,\mathrm{d}t,$ où $z\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}$.

Exercice 2. ($\heartsuit\heartsuit$) Discuter en fonction des paramètres de la nature des intégrales

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2})\mathrm{d}t$

Exercice 3. ($\heartsuit\heartsuit$) Étudier la nature des intégrales suivantes. Dans le cas de convergence, calculer la valeur.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ 2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+e^t\right)\left(1-e^{-t}\right)}$

Exercice 4. ($\heartsuit$) Établir la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, puis sa valeur, à l'aide du changement de variable $u=\dfrac{1}{t}$.

Exercice 5. ($\heartsuit\heartsuit$) Soit P une fonction polynomiale. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6. ($\heartsuit\heartsuit$) On pose $F(x)=\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^x-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer l'ensemble de définition de F.

Exercice 7. ($*$)

1) Justifier que, pour tout entier $n\geqslant 0$, l'intégrale $I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

2) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. En déduire la valeur de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ (pour le calcul de I_0, voir l'exercice précédent).

Exercice 8. ($*$)

1) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt$. On note I sa valeur.

2) Montrer que $I=\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}dt$. En déduire à l'aide d'un encadrement que $I=\ln 2$.

Exercice 9. ($*$)

1) Montrer que $f: t\mapsto \dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{\mathrm{Arctan}(t)^2}$ est intégrable sur $]0,1]$.

2) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_x^{1} \frac{1}{\mathrm{Arctan}\,t^2}$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 10. ($*$)

1) Démontrer que, pour tout $x>0$, $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

2) Démontrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2} dt$.

3) Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
En déduire une expression de $F(x)$ en fonction de $x > 0$.

4) En déduire la valeur de I.

Exercice 11. ($\heartsuit$)puis ($*$)
Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}\,(n > 0$ pour $K_n)$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + x^2\right)^n}$$

1) Justifier la convergence de I.

2) **Intégrales de Wallis**.

-a- Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$

-b- Montrer que la suite (I_n) est décroissante et strictement positive.

-c- En utilisant l'inégalité $I_n \leqslant I_{n-1} \leqslant I_{n-2}$, montrer que $I_n \sim I_{n-1}$.
En déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

3) Grâce à un changement de variable judicieux, exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, les intégrales J_n et K_n en fonction d'intégrales I_k. (*Indication : pour* K_n *on pose* $x = \tan t$).

4) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x^2 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

en déduire que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sqrt{n} I_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n} I_{2n-2}$$

5) Conclure : $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 12. ($\heartsuit$)puis ($*$) On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$.

1) Montrer que l'intégrale I converge. On pourra s'aider d'une intégration par parties.

2) En minorant $\dfrac{1}{t}$ sur chaque intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$ montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty\,[$.

3) En observant

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} \, \mathrm{d}t$$

déterminer le signe de I.

4) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \, \mathrm{d}t$.