Programme de colle de mathématiques
Semaine 7 - Du 10 au 15 Novembre 2025

V. Fonctions intégrables

- Convergence absolue des intégrales. Intégrabilité.
- Fonctions intégrables usuelles : $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$, $t \mapsto \ln(t)$.
- Théorème de comparaison avec les quatre outils de comparaison $\leqslant$, o, O, $\sim$ pour l'intégrabilité et adaptation à la convergence d'intégrales dans le cas de fonctions positives.
- Plein d'exemples du cours à savoir refaire.

VI. Espaces vectoriels normés

- Normes, distances : définitions, propriétés. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$. Norme $\|\cdot\|_\infty$ sur l'ev des fonctions bornées. Normes associée à un produit scalaire.
- Boule ouverte, boule fermée. Convexité.
- Suites d'éléments d'un evn. Suites bornées, suites convergentes. Propriétés : unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, opérations sur les limites.
- Normes équivalentes. Méthode pratique pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes à l'aide d'une suite. Equivalence des normes en dimension finie.
- Caractérisation de la convergence en dimension finie à l'aide de la convergence des suites de coordonnées.
- Caractérisation séquentielle de la continuité des applications linéaires.
- Pas encore de topologie dans ce chapitre, pas encore de continuité des applications.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
- On pose $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Domaine de définition de Γ. Déterminer pour $x > 0$ une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.
- Sur des exemples, intégrales de Bertand. On a fait : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^{1/3}}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
- $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.
- $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes équivalentes sur $\mathbb{K}^2$.
- Une boule ouverte ou fermée est convexe.
- Si $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est semblable à D alors la suite (A^n) converge.