Chapitre
Polynômes d'endomorphismes et éléments propres

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

I.1 Définitions et premières propriétés

Définition (Polynômes d'endomorphismes et de matrices)

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, et par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f$.
- On pose $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, et par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A^k \times A$.
- Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k = a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0 \,\mathrm{Id}_E \qquad P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$$

Exemples

1) Si $P = 3X^2 - 4X + 2$ alors $P(f) = 3f^2 - 4f + 2\,\mathrm{Id}_E$ et $P(A) = 3A^2 - 4A + 2I_n$.
2) Soient D une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer $P(D)$.
3) **A retenir** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.
   -a- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k =$
   -b- Montrer que si $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(A) =$.

Théorème (Règles de calculs)

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\quad (\lambda P + Q)(f) = \lambda P(f) + Q(f) \qquad (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad (\lambda P + Q)(A) = \lambda P(A) + Q(A) \qquad (PQ)(A) = P(A) \times Q(A)$.

Corollaire (Commutation)

Avec les mêmes notations, pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f) \qquad P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A).$$

Propriétés (Stabilité du noyau de $P(f)$ par f)

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ alors le noyau de $P(f)$ est stable par f.

✎ **En pratique** ✎ Cas particulier utile : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, avec $P = X - \lambda$, $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ est stable par f.

I.2 Polynôme annulateur

Définition (Polynôme annulateur)

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle **polynôme annulateur** de f un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **polynôme annulateur** de A un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0_n$.

Exemples

1) Soient p, s respectivement projecteur et symétries d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Déterminer un polynôme annulateur de p et s.
2) Soit $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ et $f : u \mapsto u'$. Montrer que $X^2 + 1$ est annulateur de f.

Remarques (Existence d'un polynôme annulateur)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A admet un polynôme annulateur.

✎ Méthode pratique ✎ (Calcul d'inverse/d'itérées à l'aide d'un polynôme annulateur)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A.

- **Calcul d'inverse**. Si $P(0) \neq 0$, on peut factoriser par A dans $P(A)$ et faire apparaître une matrice B tel que $AB = I_n$.
- **Calcul d'itérées**. Pour calculer A^n, on effectue la division euclidienne de X^n par P : $X^n = QP + R$ alors $A^n = R(A)$.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2
2) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
3) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

II Eléments propres

II.1 Eléments propres d'un endomorphisme

Motivation : on a déjà exposé des exemples de diagonalisation d'une matrice A, à savoir déterminer une matrice diagonale D semblable à A telle que $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible.
Si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, cela revient à montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.
La recherche de vecteur x et scalaire λ tel que $f(x) = \lambda x$ est donc déterminante dans la diagonalisation : x est appelé **vecteur propre**, λ **valeur propre**.

Définition (Eléments propres d'un endomorphisme)

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une **valeur propre** de f lorsqu'il existe un vecteur $\boxed{\textbf{non nul}}$ $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$.
- Dans ce cas, un tel vecteur non nul x est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
- Dans ce cas
$$\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) = \{x \in E \;/\; f(x) = \lambda x\} \neq \{0_E\}$$
est appelé le **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ. Cet ensemble sera noté $E_\lambda(f)$.

Remarques

- Le vecteur nul $x = 0_E$ vérifie $f(x) = \lambda x$ pour tout λ mais n'est pas vecteur propre.
- Si x est un vecteur propre alors la valeur propre est unique.
- En tant que noyau, $E_\lambda(f)$ est un sev de E, et il n'est pas réduit à $\{0_E\}$
$$\dim E_\lambda(f) \geqslant 1.$$
- L'équation $f(x) = \lambda x$ est appelée **équation aux éléments propres**.
- λ est valeur propre si et seulement si $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injective.

Définition (Spectre)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble des valeurs propres de f est appelé **spectre** de f et est noté $\operatorname{Sp}(f)$.

Propriétés (Caractérisation d'une valeur propre en dimension finie)

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose $\boxed{E \text{ de dimension finie } n \in \mathbb{N}^*}$. Les proprositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$

(ii) $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas bijective

(iii) $\operatorname{rg}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) < n$

(iv) $\det(f - \lambda \operatorname{Id}_E) = 0$.

Propriétés (Droite stable par un endomorphisme)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit D une droite de E.
D est stable par f si et seulement si D est engendré par un vecteur propre de f.

Exemples Déterminer les éléments propres (valeur propre, sous-espace propres) des endomorphismes suivants $f \in \mathcal{L}(E)$

1) E un $\mathbb{K}$-ev et $f = \mu \operatorname{Id}_E$.

2) $E = \mathcal{C}^\infty$ et $f : u \mapsto u'$

3) $E = \mathbb{K}[X]$ et $f : P \mapsto XP$

4) $E = \mathbb{R}^2$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème (Stabilité des sous-espaces propres)

Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent.
Les sous-espaces propres de f sont stables par g.

Remarques (Endomorphisme induit sur les sous-espaces propres)

Comme f et f commutent, les sous-espaces propres de f sont stables par f.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, la restriction de f à $E_\lambda(f)$ est l'homothétie $\lambda \operatorname{Id}_{E_\lambda(f)} : x \mapsto \lambda x$.

Exemples On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices qui commutent avec A.

1) **Méthode matricielle**.

2) **Méthode algébrique**. Avec des applications linéaires. On pose f l'endomorphisme canoniquement associé à A et on cherche les endomorphismes g qui commutent avec f.

Théorème (Somme de sous-espaces propres)

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors la somme $E_{\lambda_1}(f) + \cdots + E_{\lambda_p}(f)$ est directe.

⚠ **Attention** ⚠ Si la somme est bien directe, on n'a pas forcément : $E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f) = E$

Corollaire (Famille de vecteurs propres)

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x_1, \ldots, x_p$ p vecteurs propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
Alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Exemple On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

Corollaire (Majoration du nombre de valeurs propres)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors f possède au plus n valeurs propres.

Théorème (Racine d'un polynôme annulateur de f)

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

- Si $f(x) = \lambda x$ alors $P(f)(x) = P(\lambda)x$.
- En particulier, si P est annulateur de f et si λ est valeur propre de f alors $P(\lambda) = 0$.

⚠ **Attention** ⚠ $P(f)(x)$ (l'endomorphisme $P(f)$ s'applique au vecteur x) ne peut pas être écrit $P(f(x))$ (le polynôme P ne peut s'appliquer au vecteur $f(x)$).

II.2 Eléments propres d'une matrice

Définition (Eléments propres d'une matrice)

Soients $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une **valeurs propre** de A lorsqu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ $\boxed{\textbf{non nul}}$ tel que $AX = \lambda X$.
- Dans ce cas, une telle matrice-colonne non nulle X est appelée **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
- Dans ce cas
$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \;/\; AX = \lambda X\} \neq \{0_{n1}\}$$
est appelé le **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ. Cet ensemble sera noté $E_\lambda(A)$.

☞ **Explication** ☜ Les éléments propres de A sont les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \mapsto AX$.

Notation On Sp(A) l'ensemble des valeurs propres de A appelé **spectre** de A.

Exemples

1) Que signifie que 0 est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que 0 et 1 sont valeurs propres de B et déterminer les espaces propres associés.

Théorème

Soients $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A alors $P(\lambda) = 0$, autrement dit : $\quad \mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Rac}(P)$.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A à l'aide d'un polynôme annulateur de A.

⚠ **Attention** ⚠ Si P est annulateur de A et $P(\lambda) = 0$ alors λ n'est pas nécessairement valeur propre de f.

III Polynôme caractéristique

III.1 Définition

Théorème (Polynôme caractéristique)

- **Endomorphisme**. Soient E un espace vectoriel de $\boxed{\text{dimension finie}}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Le **polynôme caractéristique** de f est le polynôme d'indéterminée X : $\chi_f(X) = \det(X\,\mathrm{Id}_E - f)$.
- **Matrice**. Soi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Le **polynôme caractéristique** de A est le polynôme d'indéterminée X : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

Remarques (Lien entre ces deux notions)

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est celui de n'importe quelle matrice le représentant.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Théorème (Coefficients particuliers de χ_A, χ_f)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est de degré n, unitaire. Plus précisément :

$$\chi_A(X) = X^n - \operatorname{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

NB : résultat similaire si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

III.2 Lien avec les éléments propres

Théorème-Définition (Valeurs propres et polynôme caractéristique)

Les valeurs propres d'un endomorphisme/d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique.

L'**ordre de multiplicité** d'une valeur propre est son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

✎ **En pratique** ✎ Pour déterminer les racines de χ_A on cherchera à le factoriser, et donc à effectuer des opérations sur les lignes/colonnes du déterminant pour faire apparaître des facteurs.
On ne développe pas avec Sarrus !

Exemple

1) Déterminer les valeurs propres, leur multiplicité et une base des sous espaces-propres des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Que dire de la somme des sous-espaces propres dans les trois cas?

2) Déterminer les valeurs propres d'une matrice triangulaire, d'une matrice diagonale.

Lemme

Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E stable par f.
On note g la restriction de f à F, $g = f_{|F}$.
Alors χ_g divise χ_f. Par conséquent $\operatorname{Sp}(g) \subset \operatorname{Sp}(f)$.

Théorème (Majoration de la dimension des sous-espaces propres)

Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et λ une valeur propre de f.
Notons m_λ la multiplicité de cette valeur propre, alors :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant m_\lambda.$$

Conséquence importante : le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est de dimension 1.

Théorème (Polynômes caractéristiques de matrices semblables)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables alors $\chi_A = \chi_B$. Par conséquent, deux matrices semblables ont même valeurs propres et mêmes ordre de multiplicité.

⚠ **Attention** ⚠ : la réciproque est fausse.

Propriétés (Somme et produit des valeurs propres)

Si le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est scindé c'est-à-dire :

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) \quad \text{où } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

alors

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad\qquad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

NB : résultat similaire si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Remarques

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les polynômes sont scindés donc ce résultat est toujours valable.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut avoir intérêt à considérer les valeurs propres complexes de A (ou f) pour pouvoir utiliser ces résultats.

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A^3 - 2A^2 - 8A = 0_n$. Montrer que la trace de A est un entier pair.

III.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème (Cayley-Hamilton)

- **Endomorphisme**. Soient E un espace vectoriel de $\boxed{\text{dimension finie}}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
  Le polynôme caractéristique de f est annulateur de f : $\chi_f(f) = O_{\mathcal{L}(E)}$.
- **Matrice**. Soi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  Le polynôme caractéristique de A est annulateur de A : $\chi_A(A) = 0_n$.

⚠ **Attention** ⚠ On avait déjà vu qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n^2. On fait mieux ici avec un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Mais ce n'est pas forcément le degré minimal. Contre-exemple :

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Retrouver l'expression de l'inverse de A.