

VI. Espaces vectoriels normés

- Normes, distances : définitions, propriétés. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$. Norme $\|\cdot\|_\infty$ sur l'ev des fonctions bornées. Normes associée à un produit scalaire.
- Boule ouverte, boule fermée. Convexité.
- Suites d'éléments d'un evn. Suites bornées, suites convergentes. Propriétés : unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, opérations sur les limites.
- Normes équivalentes. Méthode pratique pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes à l'aide d'une suite. Equivalence des normes en dimension finie.
- Caractérisation de la convergence en dimension finie à l'aide de la convergence des suites de coordonnées.
- Caractérisation séquentielle de la continuité des applications linéaires.
- Pas encore de topologie dans ce chapitre, pas encore de continuité des applications.

VII. Polynômes de matrices/endo - Elements propres

- Polynomes de matrices, d'endomorphismes. Règle de calculs.
- Eléments propres : valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres. Liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Les sous-espaces propres sont en somme directe.

- Polynôme caractéristique. Lien entre ses racines et les valeurs propres. Multiplicité des valeurs propres, inégalité entre dimension d'un sous espace propre et multiplicité. Somme et produit des valeurs propres dans le cas scindé. Coefficients particuliers de χ : degré n , degré $n-1$, constant.
- Polynôme annulateur. Application : calcul d'inverse, de puissances, lien avec les valeurs propres. Théorème de Cayley-Hamilton.

Les exercices pour cette colle

On commence le TD Mardi, mais beaucoup d'exemples ont été traités en cours, il faut donc travailler ces exemples qui seront les exercices de cette colle :

- 1) calcul de A^n avec un polynôme annulateur
- 2) calcul d'inverse avec un polynôme annulateur
- 3) calcul de polynôme caractéristique d'une matrice $(2, 2)$, $(3, 3)$ pour obtenir une forme factorisée
- 4) calcul de valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique
- 5) calcul des valeurs propres avec un polynôme annulateur, utilisation de la trace
- 6) Montrer qu'une famille de fonctions est libre en l'interprétant comme une familles de vecteurs propres (comme l'exemple du cours des $x \mapsto e^{kx}$)
- 7) on révise : montrer qu'une matrice est semblable à une autre (diagonale, triangulaire, ou autre)

Questions de cours (preuve à connaître)

- $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.
- $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes équivalentes sur $\mathbb{K}^2$.
- Une boule ouverte ou fermée est convexe.
- Si $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est semblable à D alors la suite (A^n) converge.
- Si f et g commutent les sous-espaces propres de f sont stables par g .
- Si $f(x) = \lambda x$, alors $[P(f)(x)] = P(\lambda)(x)$ (sans écrire la bêtise que vous savez...)
- Si x et y sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes alors (x, y) est libre.