VII. Polyômes de matrices/endo - Elements propres

- Polynomes de matrices, d'endomorphismes. Règle de calculs.
- Eléments propres : valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres. Liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Les sous-espaces propres sont en somme directe.
- Polynôme caractéristique. Lien entre ses racines et les valeurs propres. Multiplicité des valeurs propres, inégalité entre dimension d'un sous espace propre et multiplicité. Somme et produit des valeurs propres dans le cas scindé. Coeffients particuliers de χ : degré n, degré $n-1$, constant.
- Polynôme annulateur. Application : calcul d'inverse, de puissances, lien avec les valeurs propres. Théorème de Cayley-Hamilton.

Les exercices classiques de cette colle

1) calcul de A^n avec un polynôme annulateur
2) calcul d'inverse avec un polynôme annulateur
3) calcul de polynôme caractéristique d'une matrice $(2,2)$, $(3,3)$ pour obtenir une forme factorisée
4) calcul de valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique
5) calcul des valeurs propres avec un polynôme annulateur, utilisation de la trace
6) Montrer qu'une famille de fonctions est libre en l'interprétant comme une familles de vecteurs propres (comme l'exemple du cours des $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$)
7) on révise : montrer qu'une matrice est semblable à une autre (diagonale, triangulaire, ou autre)

VIII. Suites et séries de fonctions

1) Suites de fonctions. Convergence simple. Convergence uniforme. Transfert de régularité : continuité, classe $\mathcal{C}^1$, classe $\mathcal{C}^p$. Echange limite-intégrale sur un segment.
2) Suites de fonctions. Convergence simple. Convergence uniforme. Convergence normale. Transfert de régularité : continuité, classe $\mathcal{C}^1$, classe $\mathcal{C}^p$. Intégration terme à terme sur un segment. Echange limite-somme (théorème de la double limite) dans le cas d'une limite finie.
3) De très nombreux exemples ont été traités.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Si f et g sommutent les sous-espaces propres de f sont stables par g.
- Si $f(x) = \lambda x$, alors $[P(f)(x)] = P(\lambda)(x)$ (sans écrire la bêtise que vous savez...)
- Si x et y sont deux vecteurs propres associés à ses valeurs propres distinctes alors (x, y) est libre.

Pas d'exercices traités en TD sur les suites et séries de fonctions donc pour cette colle on ne peut donner que des exemples traités en cours parmi la liste ci-dessous :

- Soit $f_n : x \mapsto x^n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur sur $[0,1]$ (argument rapide) si sur $[0,1[$, ; mais qu'elle converge uniformément sur $[0,a]$ pour tout $a \in [0,1[$.
- $f_n : x \mapsto \begin{cases} 1-nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ sur $[0,1]$. Y a t-il convergence uniforme? Utiliser un argument rapide.
- Soit $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1,1]$.
- Soit $f_n : x \mapsto xe^{-n^2x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
- Soit
$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2-2n^2x & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \qquad \text{faire un dessin.}$$
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement. Et à l'aide d'intégrales montrer que la convergence n'est pas uniforme.
- Convergence simple, normale des séries de fonctions usuelles géométrique, exponentielle, Riemann.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1, +\infty[$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément mais pas normalement sur $[1, +\infty[$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $u_n(x) = x^2 \,\mathrm{e}^{-nx}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \sum \dfrac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.
- Montrer que la fonction $x \mapsto \sum \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Calculer la limite de ζ en $+\infty$.
- Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ en remarquant que $\displaystyle\frac{1}{(n+1)2^n} = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \,\mathrm{d}t$.
- Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.