# Chapitre
# Suites et séries de fonctions

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On rappelle, que si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble des fonctions bornées de $I$ dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel, que l'on munit de la norme uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|.$$

## I Suites de fonctions

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose la fonction $f_n$ définie sur un intervalle $I$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On va définir deux modes de convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On veillera à faire la différence entre la nature des objets :

- $f_n$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$ soit un élément de $\mathbb{K}^I$
- pour $x \in I$, $f_n(x)$ est un nombre, un élément de $\mathbb{K}$
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions, soit un élément de $(\mathbb{K}^I)^\mathbb{N}$
- pour $x \in I$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres, soit un élément de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.

### I.1 Convergence simple

**Définition (Convergence simple)**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** sur $I$ vers $f$ si :

$$\boxed{\forall x \in I}, \quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

$f$ est appelée la **limite simple** de $f$. On note note parfois $f_n \xrightarrow{cs} f$.

**Exemples** Montrer que les suites de fonctions suivantes convergent simplement et donner la limite :

1) $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$. Faire un dessin.

2) $f_n : x \mapsto \begin{cases} 1-nx & \text{si } x\in[0,\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n},1] \end{cases}$ sur $[0,1]$. Faire un dessin.

3) $f_n : x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ sur $\mathbb{R}$.

⚠ **Attention** ⚠ Si les $f_n$ sont continues, la limite simple de la suite $(f_n)$ n'est pas forcément continue. Contre-exemple :

### I.2 Convergence uniforme

☞ **Explication** ☜ On peut réécrire la définition de la convergence simple avec les $\varepsilon$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $I$ vers $f$ si :

$$\forall x\in I,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists N_{\varepsilon,x}\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\geqslant N_{\varepsilon,x},\ |f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

$N_{\varepsilon,x}$ dépend de $\varepsilon$ et $x$.
On adapte la définition en faisant en sorte que $N_{\varepsilon,x}$ ne dépende pas de $x$.

**Définition (Convergence uniforme)**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** sur $I$ vers $f$ si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On note note parfois $f_n \xrightarrow{cu} f$.

**Théorème (Caractérisation de la convergence uniforme)**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** sur $I$ vers $f$ si et seulement si :

- les $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang
- $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

**Propriétés (Convergence uniforme implique convergence simple.)**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $I$ vers $f$ alors elle converge simplement sur $f$ vers $I$.
**Conséquence** : la limite uniforme si elle existe est nécessairement la limite simple.

**✎ Méthode pratique ✎ (Étudier la convergence uniforme)**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
Pour étudier la convergence uniforme :

- on détermine d'abord la limite simple $f$ (si elle existe) de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en calculant pour tout $x \in I$, la limite de $f_n(x)$
- puis, plusieurs options selon les situations.
  1) Pour obtenir la convergence uniforme. En majorant $|f_n(x) - f(x)|$ on prouve l'existence d'une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **indépendante de** $x$ de limite nulle telle que
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n.$$
  2) On calcule explicitement $\|f_n - f\|_\infty$ en étudiant les variations de la fonction $f_n - f$, elles peuvent être évidentes, ou alors on fait une étude de fonction; ne reste plus qu'à calculer la limite de $\|f_n - f\|_\infty$
  3) Pour obtenir la non convergence uniforme. On peut déterminer une suite $(a_n)$ d'éléments de $I$ telle que $((f_n - f)(a_n))$ ne converge pas vers 0.

**Exemples**

1) Soit $f_n : x \mapsto x^n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$, sur $[0, 1]$; mais qu'elle converge uniformément sur $[0, a]$ pour tout $a \in [0, 1[$.
2) Soit $f_n : x \mapsto x^n(1 - x)^n$ sur $[0, 1]$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
3) Soit $f_n : x \mapsto xe^{-n^2x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

4) Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

5) Bosses glissantes. Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$ sur $\mathbb{R}$. Faire un dessin.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ mais converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}$.

## I.3 Régularité de la limite

### I.3.a Continuité

**Motivation :** si une suite $(f_n)$ de fonctions **continues** converge (dans un sens à préciser) sur $I$ vers $f$, a-t-on $f$ continue sur $I$?
La réponse est NON, en général comme le prouve l'exemple $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$. On a $(f_n)$ convergeant simplement vers une fonction qui n'est pas continue sur $[0,1]$.

La convergence simple ne suffit pas à garantir le transfert de continuité, la convergence uniforme OUI, comme l'énonce le théorème suivant.

**Théorème (Continuité de la limite)**

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $I$
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $I$ vers $f$.

Alors $f$ est continue sur $I$.

**✎ Méthode pratique ✎ (Pour montrer la non convergence uniforme)**

Si une suite de fonctions **continues** sur $I$ converge simplement vers une fonction qui n'est pas continue sur $I$ alors la convergence ne peut pas être uniforme.

**Exemples**

1) Soit $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$.

2) $f_n : x \mapsto \begin{cases} 1-nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ sur $[0,1]$.

Voici un résultat très utile, qui sera souvent utilisé dans ce chapitre et dans d'autres chapitres.

**Lemme (Caractérisation de la régularité sur un intervalle à l'aide de segments)**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
La fonction $f$ est continue/dérivable/de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ si et seulement si elle est continue/dérivable/de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout segment de $I$.

**NB :** ce résultat peut d'adapter à d'autres cas. La fonction $f$ est continue/dérivable/de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]0,+\infty[$ si et seulement si elle est continue/dérivable/de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout intervalle de type $[a,+\infty[$ où $a > 0$.

**Corollaire (Continuité de la limite)**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $f$ une fonction définie sur $I$.
On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $I$
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus $I$ vers $f$.

Alors $f$ est continue sur $I$.

**Exemple** Retour sur l'exemple des bosses glissantes. Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

⚠ **Attention** ⚠ La convergence uniforme sur tout segment de $I$ n'implique pas la convergence uniforme sur $I$.

### I.3.b Échange limite-intégrale

**Motivation** : si une suite de fonctions $(f_n)$ converge (dans un sens à préciser) sur $[a, b]$ vers $f$, a-t-on

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La réponse est NON, en général comme le prouve l'exemple

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2-2n^2x & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}.$$

On a $(f_n)$ convergeant simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ et $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$.

La convergence simple ne suffit pas à garantir l'échange de limite, la convergence uniforme OUI, comme l'énonce le théorème suivant.

**Théorème (Échange limite-intégrale)**

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a, b]$ et $f$ une fonction définie sur $[a, b]$.
On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $[a, b]$
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers $f$.

Alors :

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**✎ Méthode pratique ✎ (Pour montrer la non convergence uniforme)**

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f$ sur un segment $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne tend pas vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $f$.

**Exemple** L'exemple en préambule de cette partie.

⚠ **Attention** ⚠ Le théorème précédent n'est plus vrai lorsque l'on intègre sur un intervalle non bornée (intégrale impropre) comme le montre l'exemple suivant :

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{x}{n^2} & \text{si } x\in[0,n]\\ \frac{2}{n}-\frac{x}{n^2} & \text{si } x\in[n,2n]\\ 0 & \text{si } x\geqslant 2n\end{cases}.$$

La suite de fonctions converge uniformément vers la fonction nulle, les fonctions $f_n$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et pourtant $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$ ne tend pas vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} 0$.
On verra d'autres théorème dans le chapitre "Convergence dominée".

### I.3.c Dérivabilité

**Motivation** : si une suite de fonctions $(f_n)$ **de classe** $\mathcal{C}^1$ converge (dans un sens à préciser) sur $I$ vers $f$, a-t-on $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$?
La réponse est NON, en général comme le prouve l'exemple $f_n(x)=x^n$ sur $[0,1]$. On a $(f_n)$ convergeant simplement vers une fonction qui n'est pas continue sur $[0,1]$ et donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
Pire, la convergence uniforme ne suffit même pas comme le prouve l'exemple $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ qui converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $x\mapsto|x|$ qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$.

**Théorème (Transfert de la classe $\mathcal{C}^1$)**

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $f$, $g$ deux fonctions définies sur $I$.
On suppose :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** sur $I$ vers $f$
- $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** sur $I$ vers $g$

Alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $f'=g$.
**NB**: la conclusion subsiste si la convergence uniforme de $(f_n')$ vers $g$ a lieu sur tout segment inclus dans $I$.

**Théorème (Transfert de la classe $\mathcal{C}^p$)**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $f$, $g$ deux fonctions définies sur $I$.
On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $I$
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** sur $I$ vers $f$
- pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** sur $I$
- $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** sur $I$ vers $g$

Alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $I$ et $f^{(p)} = g$.
**NB**: la conclusion subsiste si la convergence uniforme de $(f_n^{(p)})$ vers $g$ a lieu sur tout segment inclus dans $I$.

# II Séries de fonctions

Nous étudions maintenant le cas des séries de fonctions
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$.
Étudier la série de fonctions $\sum u_n$ revient à étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tous les résultats relatifs aux suites de fonctions vont donc s'adapter naturellement aux séries de fonctions; mais pour ces dernières on dispose d'un nouveau type de convergence.

On veillera à faire la différence entre la nature des objets :

- $\sum u_n$ est une série de fonctions
- pour $x \in I$, $\sum u_n(x)$ est une série numérique
- pour $x \in I$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ un nombre, un élément de $\mathbb{K}$
- $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$

## II.1 Convergence simple, convergence uniforme

**Définition (Convergence simple - Convegence uniforme)**

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge simplement (resp. uniformément)** si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément) sur $I$.

**Propriétés (Convergence uniforme implique convergence simple.)**

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $S$ une fonction définie sur $I$.
Si $\sum u_n$ converge uniformément sur $I$ vers $S$ alors elle converge simplement sur $I$ vers $S$.
**Conséquence** : la limite uniforme si elle existe est nécessairement la limite simple.

**Exemples** Séries découlant des séries numériques usuelles

1) Série géométrique. Posons $u_n : x \mapsto x^n$. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers

2) Série exponentielle. Posons $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers

3) Série de Riemann. Posons $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$.

   La fonction somme est notée : $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ appelée fonction dzeta de Riemann.

**Exemple** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$. Étudier la convergence simple de $\sum u_n$.

**Théorème (Caractérisation de la convergence uniforme à l'aide du reste)**

Soit $\sum u_n$ une séries de fonctions définies sur un intervalle $I$ que l'on suppose converger simplement. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$, le reste :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $I$ si et seulement si la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $I$ c'est-à-dire si et seulement si la suite $(\|R_n\|)_\infty$ converge vers 0.

**✎ Méthode pratique ✎ (Convergence uniforme dans le cas d'une série alternée)**

Lorsque $u_n$ est de la forme $u_n(x) = (-1)^n \alpha_n(x)$ avec pour $x$ fixé, la suite $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle, le critère spécial des séries alternées donne la majoration du reste :

$$\forall x \in I,\ \ \forall n \in \mathbb{N}, |R_n(x)| \leqslant |\alpha_n(x)|.$$

Ce qui en majorant $|\alpha_n(x)|$ permet parfois d'obtenir une majoration de $|R_n(x)|$ par une suite indépendante de $x$ et de limite nulle; fournissant alors la convergence uniforme attendue de la suite des restes $(R_n)$ vers la fonction nulle.

**Exemple** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1,+\infty[$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.
Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$.

## II.2 Convergence normale

**Définition (Convergence normale)**

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement** si la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.

**Remarques (Convergence normale ⇒ convergence absolue)**

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle $I$.

Si $\sum u_n$ converge normalement sur $I$ alors pour tout $x \in I$, **la série numérique** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge absolument.

⚠ **Attention** ⚠ La notion de convergence absolue concerne des séries numériques pas des séries de fonctions.

**Théorème (Convergence normale ⇒ Convergence uniforme)**

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle $I$.
Si $\sum u_n$ converge normalement sur $I$ alors elle converge uniformément et simplement sur $I$.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Prouver la convergence normale)**

Essentiellement deux méthodes :

1) on détermine explicitement $\|u_n\|_\infty$, une étude de fonctions est parfois nécessaire

2) ♡ le plus souvent, il suffit de trouver une majoration uniforme de $|u_n(x)|$ par une suite $(\alpha_n)$ (indépendante de $x$) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad |u_n(x)| \leqslant \alpha_n \qquad \text{et} \qquad \sum \alpha_n \text{ converge.}$$

Ce qui garantit $\|u_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ et donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.

**Exemples**

1) Les séries de fonctions usuelles géométrique, exponentielle, Riemann.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1, +\infty[$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$. Montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $[1, +\infty[$.
*C'est donc un exemple de série qui converge uniformément sur $I$ sans converger normalement sur $I$.*

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $u_n(x) = x^2 \,\mathrm{e}^{-nx}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

✎ **Méthode pratique** ✎ **(Montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions)**

1) **Dans la très grande majorité des cas**, on prouve la convergence normale.

2) **Si la série est alternée**, on peut penser à utiliser la convergence uniforme de la suite des restes en utilisant la majoration du reste par son premier terme.

3) **Sinon**, on fait autrement, mais c'est forcément plus compliqué et très rare...

## II.3 Régularité de la somme

### II.3.a Continuité

**Théorème (Transfert de continuité)**

Soient $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle $I$.
On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est continue sur $I$
- $\sum u_n$ converge uniformément sur $I$.

Alors la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur $I$.

**NB**: la conclusion subsiste si la convergence uniforme de $\sum u_n$ a lieu sur tout segment inclus dans $I$.

⚠ **Attention** ⚠ La convergence uniforme/normale sur tout segment de $I$ n'implique pas la convergence uniforme/normale sur $I$.

**Exemples**

1) Montrer que la fonction $x \mapsto \sum \dfrac{e^{i\,nx}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \sum \dfrac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

3) Montrer que la fonction $x \mapsto \sum \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $u_n(x) = x^n - x^{n+1}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ mais que la convergence n'est pas uniforme sur cet intervalle.

### II.3.b Echange limite-somme

**Théorème (Théorème de la double-limite)**

Soient $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $a$ une borne de l'intervalle $I$ (éventuellement infinie).
On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ admet une limite finie en $a$ : $l_n = \lim_{x \to a} u_n(x)$
- $\sum u_n$ converge uniformément sur $I$.

Alors la série $\sum l_n$ converge et

$$\lim_{x \to a} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \lim_{x \to a} u_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n.$$

**Exemple** Calculer la limite de $\zeta$ en $+\infty$.

### II.3.c Échange limite-intégrale

**Théorème (Intégration terme à terme sur un segment)**

Soient $\sum u_n$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est continue sur $[a, b]$
- $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors :

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

**Exemples**

1) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ en remarquant que $\displaystyle\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$.

2) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ en remarquant que $\displaystyle\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$.

⚠ **Attention** ⚠ Le théorème précédent n'est plus vrai lorsque l'on intègre sur un intervalle non bornée (intégrale impropre) comme le montre l'exemple suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^3}(x - (n^2 - n)) & \text{si } x \in [n^2 - n, n^2] \\ -\frac{1}{n^3}(x - (n^2 + n)) & \text{si } x \in [n^2, n^2 + n] \\ 0 & \text{si } x \geqslant n^2 + n \text{ ou } x \leqslant n^2 - n \end{cases}.$$

La série $\sum u_n$ converge uniformément vers la fonction nulle, les fonctions $u_n$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et pourtant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n$ ne converge pas.
On verra d'autres théorème dans le chapitre "Convergence dominée".

### II.3.d Dérivabilité

Il est bien connu que la dérivée d'une somme finie de fonctions est la somme des dérivées. Le résultat subsite-t-il si la somme est infinie?
La réponse est NON en général. Là aussi la convergence uniforme est exigée.

**Théorème (Transfert de la classe $\mathcal{C}^1$)**

Soient $\sum u_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$.
On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$
- la série $\sum u_n$ converge **simplement** sur $I$
- la série $\sum u_n'$ converge **uniformément** sur $I$.

Alors $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et sa dérivée est $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$.
Autrement dit :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'.$$

**NB**: la conclusion subsiste si la convergence uniforme de $\sum u_n'$ a lieu sur tout segment inclus dans $I$.

**Exemple** Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**Théorème (Transfert de la classe $\mathcal{C}^p$)**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $\sum u_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$.
On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $I$
- pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$,la série $\sum u_n^{(k)}$ converge **simplement** sur $I$
- la série $\sum u_n^{(p)}$ converge **uniformément** sur $I$.

Alors $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $I$ et

$$\forall k \in [\![0, p\ ]\!], \quad S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}.$$

**NB**: la conclusion subsiste si la convergence uniforme de $\sum u_n^{(p)}$ a lieu sur tout segment inclus dans $I$.

**Exemple** La fonction $\zeta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

### II.4 Comparaison série intégrale

**✎ Méthode pratique ✎ (Obtenir une limite/un équivalent)**

La méthode de comparaison série-intégrale permet parfois de calculer la limite ou un équivalent de la fonction somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

Il faut évidemment une hypothèse de monotonie, à $x$ fixé, de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exemple** Déterminer un équivalent de $\zeta$ en 1 et sa limite en $+\infty$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

## III Quelques conseils pratiques

### Savoir-faire

1) Déterminer une norme infinie par une étude de fonctions.
2) Manipuler des inégalités pour majorer $|u_n(x)|$ par une suite indépendante de $x$.
3) Déterminer la convergence simple d'une suite/série de fonctions. On fixe $x$ et on :
   - calcule la limite de la suite numérique $(f_n(x))$ dans le cas d'une suite de fonctions
   - on étudie la convergence de la série numérique $\sum u_n(x)$ dans le cas d'une série de fonctions (le calcul de la somme n'est pas toujours utile)
4) Etudier la convergence uniforme d'une suite/série de fonctions (cf. méthodes pratiques)
5) Connaître les modes de convergence simple/uniforme/normale : les différences et les liens entre elles.
6) Connaître précisément les théorème de transfert, vérifier soigneusement toutes les hypothèses. Il faut savoir refaire les exemples.
7) Penser à se rabattre sur la convergence normale sur tout segment de $I$, lorsque la convergence normale sur l'intervalle $I$ n'est pas aisée à prouver.
8) Utilisation d'une comparaison série-intégrale pour obtenir une limite/un équivalent.

### Pièges à éviter - Erreurs classiques

- Parler de convergence normale à propos d'une suite de fonctions (cette notion n'est valable que pour une série de fonctions).
- Parler de convergence absolue à propos d'une série de fonctions (cette notion n'est valable que pour une série numérique).
- Oublier l'existence de la notion de convergence normale sur tout segment.
- Penser que la "convergence simple" suffit pour les transferts de régularité (ce qui montrerait au passage qu'on n'a pas compris grand chose à ce chapitre...)
- Penser que la "convergence normale sur tout segement de $I$" implique implique la "convergence normale sur $I$".