

Exercice 1. (♡♡) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer les valeurs propres de A et une base des sous-espaces propres associés.
- 2) En déduire qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible que l'on déterminera telles que $D = P^{-1}AP$.
- 3) **Commutant.** Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec D . En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec A .
- 4) **Recherche de racines carrées.**
 - a- Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$ et $N = P^{-1}MP$. Calculer N^2 , en déduire N .
 - b- Déterminer le nombre de matrices M telles que $M^2 = A$.

Exercice 2. (♡) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer le rang de A . En déduire sans le calculer, le polynôme caractéristique de A .
- 2) Déterminer les éléments propres de A (valeurs propres et sous-espaces propres).

Exercice 3. (♡♡) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice constituée uniquement de 1.

- 1) Déterminer les valeurs propres de A et leur multiplicité sans calculer le polynôme caractéristique.
- 2) Déterminer les sous espaces propres de A .

Exercice 4. (*) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. (*) Déterminer valeurs propres et sous espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Exercice 6. (♡) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer un polynôme annulateur P de A de degré 2.
- 2) En effectuant la division euclidienne de X^n par P . Calculer A^n (on exprimera A^n en fonction de A et I_3).

Exercice 7. (♡♡) Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables?

Exercice 8. (♡♡) On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer χ_A .
- 2) Calculer $\dim(\text{Ker}(A + I_3))$.
- 3) On pose $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.
- 4) Calculer A^k pour tout entier naturel k .
- 5) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} A^k$.

Exercice 9. (♡♡) Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
- 2) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
- 3) En déduire le terme général de la suite (u_n) .

Exercice 10. (*) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

Exercice 11. (♡♡) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que $\text{Tr}(A) \in \mathbb{Z}_-$.

Exercice 12. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 13. (*) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(M) = 0$ et $M^3 - 4M^2 + 4M = 0_n$.
Montrer que $M = 0_n$.

Exercice 14. (♡♡) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Soit p un projecteur de E .
 - a- Montrer que toute valeur propre λ de p vérifie, $\lambda^2 - \lambda = 0$.
 - b- En déduire que p a au plus deux valeurs propres que l'on déterminera.
 - c- Quels sont les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres?
- 2) Soit s une symétrie de E .
 - a- Montrer que toute valeur propre λ de s vérifie, $\lambda^2 - 1 = 0$.
 - b- En déduire que s a au plus deux valeurs propres que l'on déterminera.
 - c- Quels sont les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres?

Exercice 15. (*) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = (X - 1)P'$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

Exercice 16. (*) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $B \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n + 1$, scindé à racines simples.

On note $(a_0, \dots, a_n)$ les racines de B et $(L_0, \dots, L_n)$ la base de $\mathbb{K}_n[X]$ composée des polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux points $a_0, \dots, a_n$.

Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et f l'application qui, à $P \in \mathbb{K}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B .

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
- 2) Déterminer, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(L_i)$.
- 3) En déduire le spectre de f .

Exercice 17. (♡♡) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = M^\top$.

- 1) Déterminer un polynôme annulateur de f .
- 2) Déterminer les valeurs et les sous espaces propres de f .
- 3) Calculer la trace de f et son déterminant.

Exercice 18. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Posons $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, f(M) = M + \text{tr}(M)A$.

- 1) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de f .
- 2) En déduire le polynôme caractéristique de f .
- 3) Déterminer la dimension de $E_0(f)$.

Exercice 19. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(M) = AM$.

- 1) Montrer que toute valeur propre de A est une valeur propre de φ .
- 2) Caractériser le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi)$ et en déduire sa dimension en fonction de celle de $E_\lambda(A)$.