VII. Eléménts propres - Polynômes mat/endo

- Calcul de polynôme caractéristique.

Un calcul de polynôme caractéristique d'une matrice 3x3, pendant cette colle.

VIII. Suites et séries de fonctions

- Suites de fonctions. Convergence simple. Convergence uniforme. Transfert de régularité : continuité, classe $\mathcal{C}^1$, classe $\mathcal{C}^p$. Echange limite-intégrale sur un segment.
- Suites de fonctions. Convergence simple. Convergence uniforme. Convergence normale. Transfert de régularité : continuité, classe $\mathcal{C}^1$, classe $\mathcal{C}^p$. Intégration terme à terme sur un segment. Echange limite-somme (théorème de la double limite) dans le cas d'une limite finie.
- De très nombreux exemples ont été traités.

Questions de cours (preuve à connaître)

- La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple.
- Théorème d'échange limite-intégrale pour une suite de fonctions continue sur un segment.
- La convergence normale implique la convergence uniforme.

Rappel des exemples traités en TD qui doivent être maitrisés :

- Soit $f_n : x \mapsto x^n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur sur $[0,1]$ (argument rapide) si sur $[0,1[$, ; mais qu'elle converge uniformément sur $[0,a]$ pour tout $a \in [0,1[$.
- $f_n : x \mapsto \begin{cases} 1-nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ sur $[0,1]$. Y a t-il convergence uniforme? Utiliser un argument rapide.
- Soit $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1,1]$.
- Soit $f_n : x \mapsto xe^{-n^2 x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
- Soit
$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2n - 2n^2 x & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \qquad \text{faire un dessin.}$$
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement. Et à l'aide d'intégrales montrer que la convergence n'est pas uniforme.
- Convergence simple, normale des séries de fonctions usuelles géométrique, exponentielle, Riemann.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1,+\infty[$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément mais pas normalement sur $[1,+\infty[$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $u_n(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-nx}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \sum \dfrac{1}{n^x}$ est continue sur $]1,+\infty[$.
- Montrer que la fonction $x \mapsto \sum \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Calculer la limite de ζ en $+\infty$.
- Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ en remarquant que $\dfrac{1}{(n+1)2^n} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^n\,\mathrm{d}t$.
- Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.
- Calculer un équivalent de ζ au voisinage de $+\infty$ par une comparaison série-intégrale.