VIII. Suites et séries de fonctions

- Suites de fonctions. Convergence simple. Convergence uniforme. Transfert de régularité : continuité, classe $\mathcal{C}^1$, classe $\mathcal{C}^p$. Echange limite-intégrale sur un segment.
- Suites de fonctions. Convergence simple. Convergence uniforme. Convergence normale. Transfert de régularité : continuité, classe $\mathcal{C}^1$, classe $\mathcal{C}^p$. Intégration terme à terme sur un segment. Echange limite-somme (théorème de la double limite) dans le cas d'une limite finie.
- De très nombreux exemples ont été traités.

IX. Réduction

- Endomorphisme diagonalisable (= il existe une base de vecteurs propres).
Matrice diagonalisable(= semblable à une matrice carrée).
- Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ ($n = \dim E$) ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les 5 **conditions nécessaires et suffisantes** de diagonalisabilité du programme :
  (i) les sous-espaces propres (sep) sont supplémentaires
  (ii) la somme des dimensions des sep vaut n
  (iii) le polynome caractéristique est scindé et la multiplicité des vp est égale à la dimension des sep
  (iv) f (ou A) admet un polynôme annulateur scindé-simple
  (v) $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ est annulateur de f (ou A).

  Les 2 **condition suffisantes** de diagonalisabilité :
  (i) f (ou A) admet n vp deux à deux distinctes
  (ii) le polynôme caractéristique est scindé-simple.
- Endomorphisme trigonalisable (= il existe une base dans laquelle la matrice de f est triangulaire).
Matrice trigonalisable(= semblable à une matrice triangulaire).
- **Condition nécessaire et suffisante** de trigonalisabilité : le polynôme caractérisique de f (ou A) est scindé.
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- Rappel de quelques techniques utiles :
  1) on calcule un rang pour calculer la dimension d'un sep
  2) on utilise la trace pour obtenir des informations sur les vp (une valeur propre manquante)
  3) on utilise autant que possible des relations sur les colonnes pour obtenir des vecteurs du noyau/sep.

Questions de cours (preuve à connaître)

- f est diagonalisable ssi les sep sont supplémentaires.
- Les sep sont supplémentaires ssi la somme de leur dimension vaut $\dim E$.
- Sur un exemmple déterminer le terme général de la suite récurrente linéaire $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ dans le cas où l'équation caractéristique possède deux racines distinctes.
- $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)}^{n} \lambda \qquad \det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda$ par trigonalisation.

Rappel des exemples traités en cours qui doivent être maitrisés :

- L'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, $f : P \mapsto P - P'$ n'est pas diagonalisable.
- Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.
- Diagonaliser, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}BP$). Puis calculer A^n.
- Diagonaliser, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}BP$).
- La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?
La trigonaliser.
- Montrer que si A est diagonalisable et ne possède qu'une seule valeur propre α alors $A = \alpha I_n$.
- On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Deux méthodes pour étudier la diagonalisabilité ((1) : après avoir calculé A^2, (2) après avoir calculé $\mathrm{rg}\, A$)