Chapitre Réduction

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Diagonalisation

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\boxed{\text{de dimension finie}}$.

Définition (Endomorphisme diagonalisable)

Un endomorphisme f de E est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

On cherche donc une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\varepsilon_1) & & f(\varepsilon_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \\ \varepsilon_n \end{array}$$

Exemple Les homothéties, projecteurs et symétries de E sont diagonalisables.

Théorème (CNS1 de diagonalisabilité d'un endomorphisme)

Soit f un endomorphisme de E. On pose $n = \dim E$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable

(ii) il existe une base de E constituée de vecteurs propres

(iii) E est la somme directe des sous-espaces propres de f, $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} E_\lambda(f) = E$

(iv) la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à $n (= \dim E)$

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = n = \dim E$$

(v) χ_f est scindé, et la multiplicité des valeurs propres est égale à la dimension des sous-espaces propres.

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad m_\lambda = \dim E_\lambda(f)$$

.

Exemple Posons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, $f : P \mapsto P - P'$. Montrer que f n'est pas diagonalisable.

Théorème (Conditions suffisantes de diagonalisabilité d'un endomorphisme)

Soit f un endomorphisme de E.

- Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes alors f est diagonalisable. De plus les sous espaces-propres sont tous de dimension 1.
- Si χ_f est scincés à racine simples (on dit aussi que χ_f est **scindé-simple**) alors f est diagonalisable. De plus les sous espaces-propres sont tous de dimension 1.

⚠ **Attention** ⚠ La réciproque est fausse. Contre-exemple :

Théorème (CNS2 de diagonalisabilité d'un endomorphisme avec polynôme annulateur)

Soit f un endomorphisme de E. On pose $n = \dim E$
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable

(ii) f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples (ou scindé-simple).

(iii) $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de f.

Exemple Les projecteurs et symétries de E sont diagonalisables.

Définition (Matrice diagonalisable)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** si elle semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire il une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.

Théorème (Lien matrice/endomorphisme diagonalisable)

Soit f un endomorphisme de E et A sa matrice dans une base de E.
Alors A est diagonalisable si et seulement si f l'est.

Dès lors les théorèmes donnant des CNS et CS énoncées pour des endomorphismes s'adaptent aux matrices.

Théorème (CNS1 de diagonalisabilité d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est diagonalisable

(iii) $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est la somme directe des sous-espaces propres de A, $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A) = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

(iv) la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$$

(v) χ_A est scindé, et la multiplicité des valeurs propres est égale à la dimension des sous-espaces propres.

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad m_\lambda = \dim E_\lambda(A).$$

Théorème (Conditions suffisantes de diagonalisabilité d'un endomorphisme)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A admet n valeurs propres deux à deux distinctes alors A est diagonalisable. De plus les sous espaces-propres sont tous de dimension 1.
- Si χ_A est scincés à racine simples (on dit aussi que χ_A est scindé-simple) alors A est diagonalisable. De plus les sous espaces-propres sont tous de dimension 1.

Exemples

1) Diagonaliser, si possible $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}BP$). Puis calculer A^n.
2) Diagonaliser, si possible, la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}BP$).
3) La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

Exemple Résultat à retenir ainsi que sa preuve Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable et ne possède qu'une seule valeur propre α. Que dire de A?

Exemple On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.

Exemple d'application de la diagonalisation: suites à double récurrence linéaire.
Déterminer les suites u vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -5u_{n+1} + 6u_n$.
Principe de la méthode : on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
Déterminer alors une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$.
NB : cette méthode peut se généraliser à une suite à triple récurrence linéaire etc...

Théorème (CNS2 de diagonalisabilité d'un endomorphisme avec polynôme annulateur)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est diagonalisable

(ii) A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples

(iii) $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A.

Exemple On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Deux méthodes pour étudier la diagonalisabilité :

1) **Méthode 1**. Après avoir calculé A^2, montrer que A est diagonalisable.
2) **Méthode 2**. Que vaut $\text{rg}\, A$? Quelle valeur propre a-t-on mis en évidence et quelle est sa multiplicité? En déduire que A est diagonalisable.

✎ Méthode pratique ✎ (Diagonalisation)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

- **Méthode 1** : étude de la diagonalisabilité :
  - on cherche les valeurs propres de A en calculant le polynôme caractéristique χ_A, sous forme factorisée, puis ses racines
  - si les valeurs propres sont simples, χ_A est alors scindé-simple, la matrice est diagonalisable
  - **sinon**, on calcule la dimension des sous-espaces propres $\dim \text{Ker}(A-\lambda I_n)$ à l'aide du $\text{rg}(A-\lambda I_n)$, puis le théorème du rang
- **Méthode 2** : étude de la diagonalisabilité. On détermine un polynôme annulateur scindé à racines simples.
- **Méthode 3 : diagonaliser** A c'est étudier la diagonalisabilité de A ET déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$. Pour cela :
  1) on cherche les valeurs propres de A en calculant le polynôme caractéristique, sous forme factorisée, puis ses racines
  2) on calcule une base des sous-espaces propres
     - **ou bien** en calculant $\text{rg}(A - \lambda I_n)$, puis $\dim \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ grâce au théorème du rang, puis autant de vecteurs de $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ que cette dimension grâce à des relations de liaison sur les **colonnes** de $A - \lambda I_n$
     - **ou bien** (si les relations de liaison ne sont pas évidentes) on résout l'équation aux éléments propres $(A - \lambda I_n)X = 0_{n1}$.
  3) on peut enfin construire P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres construite ci-dessus.

II Trigonalisation

Définition (Endomorphisme/matrice trigonalisable)

- Un endomorphisme f de E est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire il une matrice P inversible et une matrice T triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$.

Remarque : les éléments diagonaux sont alors les valeurs proopres de la matrice.

Théorème (CNS1 de trigonalisabilité d'un endomorphisme/une matrice)

- Un endomorphisme f de E est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_A est scindé.

On rappelle ce résultat déjà vu dans le chapitre précédent, qui peut aussi se démontrer simplement par trigonalisation.

Propriétés (Somme et produit des valeurs propres)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de A comptées avec multiplicité. Alors

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad\qquad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

NB : résultat similaire si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Exemples

1) On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Trigonaliser M.

2) On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. M est-elle trigonalisable dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?

3) On reprend la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trigonaliser C.

✎ Méthode pratique ✎ (Applications de la réduction : calcul de A^n.)

- **Calcul d'itérées** A^n. On diagonalise, le cas échéant on trigonalise. On a alors $A = PDP^{-1}$ et par récurrence immédiate : $A^n = PD^nP^{-1}$ où D^n est plus facile à calculer.
- **Calcul du terme général de suites de matrices** vérifiant la relation de récurrence : $X_{n+1} = AX_n$ (ce genre de suite apparaît par exemple en probabilités). A la manière des suites géométriques : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$. On est ramené au calcul d'itérées de matrices.
- Méthode matricielle pour obtenir le **terme général d'une suite à double récurrence linéaire** : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

  On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

  Déterminer alors une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. On est ramené au cas ci-dessus.

✎ Méthode pratique ✎ (Quelques trucs pour parfois gagner du temps)

- Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments diagonaux.
- A non inversible $\Leftrightarrow$ 0 est valeur propre.
- Si λ est une valeur propre, alors le calcul de $\mathrm{rg}(A-\lambda I_n)$ donne grâce au théorème du rang la dimension de $E_\lambda(A)$.
- La trace de A est la somme de ses valeurs propres, ce qui permet parfois de déterminer une valeur propre manquante connaissant déjà les autres.
- Si A est diagonalisable et ne possède qu'une seule valeur propre α alors $A = \alpha I_n$ (savoir le prouver).
- On anticipe sur un résultat remarquable que l'on verra plus tard : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (on n'utilise pas encore ce résultat dans ce chapitre).