Chapitre
Séries entières

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Série entière d'une variable complexe

I.1 Définition

Définition (Série entière)

Une **série entière** de la variable réelle ou complexe z est une série de fonctions $\sum u_n$ où les u_n sont des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad u_n(z) = a_n z^n \quad \text{où} \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des coefficients de cette série entière qui est notée (abusivement) :

$$\sum a_n z^n.$$

Exemples Déterminer les valeurs de z complexes pour lesquelles les séries entières suivantes convergent :

$$\sum z^n \qquad \sum \frac{z^n}{n!} \qquad \sum \frac{z^n}{n} \quad \text{(on ne cherche que les réels pour cette dernière).}$$

I.2 Rayon de convergence

Lemme (d'Abel)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée.
Alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument (donc converge).

Définition (Rayon de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le **rayon de convergence** est la borne supérieure finie ou $+\infty$ de l'ensemble

$$A = \{r \in \mathbb{R}_+ \ / \ (a_n r^n) \text{ est bornée } \}.$$

Notation : on note parfois $R\left(\sum a_n z^n\right)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Remarques (Sur l'ensemble A)

A n'est pas vide car contient 0, donc la borne supérieure existe dans $[0, +\infty]$, d'où l'existence du rayon de convergence.
Si on le note R, A est un intervalle de la forme $[0, R[$, $[0, R]$ si R est fini ou $[0, +\infty[$.

Théorème (Rayon et convergence de la série)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$,

- si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument
- si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

NB : si $R = +\infty$, le deuxième point n'est pas concerné.

⚠ **Attention** ⚠ Si $|z| = R$, on ne peut conclure a priori sur la convergence. Contre-exemple :

Propriétés (Exemples usuels à connaître)

- Le rayon de convergence de $\sum z^n$ est 1 avec, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.
- Le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$ avec, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$.

Propriétés (Série entière usuelle)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha x^n$ est 1.

Définition (Disque, intervalle de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- Si la variable z est complexe, le **disque de convergence** est le disque **ouvert** de centre 0 de rayon R, noté $D(0, R)$.
- Si la variable z est réelle, l'**intervalle de convergence** est l'intervalle **ouvert** $]-R, R[$.

✎ Méthode pratique ✎ (Calcul du rayon de convergence : majoration et minoration du rayon)

On peut calculer le rayon de convergence par double inégalité.
Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée en particulier si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |z_0|$.

Exemples Déterminer le rayon de convergence des séries entières : $\sum \sin(n) z^n$, $\sum a_n z^n$ où a_n est le n-ième chiffre des décimales de $\sqrt{2}$.

A retenir : en prenant $z = 1$: $\boxed{a_n \not\to 0 \Rightarrow R \leqslant 1}$ $\boxed{(a_n) \text{ bornée} \Rightarrow R \geqslant 1}$.

Théorème (Rayon de convergence par comparaison)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.

✎ En pratique ✎ Le premier point s'applique en particulier si $a_n = o(b_n)$ ou si $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ (dans le cas où a_n, b_n réels).

Exemples Déterminer le rayon de convergence des séries entières : $\sum \dfrac{n}{n^2+n+1} z^n$, $\sum \dfrac{z^n}{(2n)!}$, $\sum \mathrm{e}^{\cos(n)} z^n$.

I.3 Règle de d'Alembert

Théorème (Règle de d'Alembert pour les séries entières)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
On suppose que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $\begin{cases} 0 & \text{si } l = +\infty \\ +\infty & \text{si } l = 0 \\ \dfrac{1}{l} & \text{si } l \in]0, +\infty[\end{cases}$.

✎ Méthode pratique ✎ (Règle de d'Alembert pour les séries)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Pour déterminer le rayon de la convergence de la série :

- **si a_n ne s'annule pas apcr**, on peut utiliser directement le théorème ci dessus en calculant la limite l de $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ alors $R = \dfrac{1}{l}$
- **si la série entière est lacunaire**, alors a_n s'annule une infinité de fois, dans ce cas on applique la règle de d'Alembert à la **série numérique** $\sum a_n z^n$, pour majorer/minorer le rayon de convergence.

⚠ **Attention** ⚠ Ne pas oublier les valeurs absolues/module dans le quotient

Exemples

1) Déterminer le rayon de convergence de $\sum \binom{1}{(2n)!} z^n$, $\sum \binom{n!}{n^n} z^n$,

2) **Série lacunaire** Déterminer le rayon de convergence de $\sum \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.

I.4 Opérations sur les séries entières

Théorème (Somme de séries entières)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n+b_n)z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$.
On a pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

⚠ **Attention** ⚠ Si $R_a = R_b$ on n'a pas forcément $R = \min(R_a, R_b)$.

☞ **Explication** ☜ Le produit de Cauchy des séries **numériques** $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série **numérique** $\sum c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}(a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ce qui motive le résultat suivant sur le produit de Cauchy de séries entières.

Théorème (Produit de Cauchy de deux séries entières)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Le prduit de Cauchy de ces deux séries entières est le série entière $\sum c_n z^n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Le rayon de convergence R de $\sum c_n z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
On a pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

⚠ **Attention** ⚠ Si $R_a \neq R_b$, on n'a pas forcément $R = \min(R_a, R_b)$. Contre-exemple $\sum z^n$ et $1 - z$

Exemple En utilisant le produit de Cauchy de $\sum z^n$ par elle-même, donner le rayon de convergence de la série produit de Cauchy et calculer la somme.

II Régularité de la somme

II.1 Continuité

Dans cette section, les séries entières dépendent de la variable réelle.
Si R désigne le rayon de convergence de la série, on s'intéresse à la régularité de la fonction

$$x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Théorème (Mode de convergence d'une série entière)

Une série entière de rayon de convergence R converge normalement, donc uniformément sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $[-R, R]$.

⚠ **Attention** ⚠ En général, il n'y a pas convergence normale sur $[-R, R]$. Contre-exemple :

Théorème (Continuité)

Le somme d'une série entière de rayon de convergence R est continue sur $]-R, R[$.

II.2 Intégration

Théorème (Primitivation)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayons de convergence R.

- Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} z^n$ est aussi égal à R.
- La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une primitive de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$. Autrement dit :

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exemples En utilisant la série entière $\sum x^n$, montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x).$$

En déduire la valeur de : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

⚠ **Attention** ⚠ Cette méthode seule ne permet pas de retrouver la valeur $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Il faut une autre information...

Exemple Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

II.3 Dérivation

Théorème

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Le rayon de convergence de la série entière $\sum n a_n z^n$ est aussi égal à R.

Théorème (Classe $\mathcal{C}^\infty$)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Alors la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.
De plus on peut dériver terme à terme. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n. \end{aligned}$$

Exemples

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Écrire $\dfrac{1}{(1-x)^k}$ sous la forme d'une somme de série entière pour $x \in]-1, 1[$.
2) On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. En dérivant f déterminer une expression de $f(x)$.

Corollaire (Expression des coefficients d'une série entière)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme f.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Corollaire

Si deux séries entières coincident sur un voisinage de 0 alors les coefficients sont égaux.

III Développement en série entière

Motivation : on souhaite effectuer la démarche inverse. Partant d'une fonction f, son expression peut-elle s'écrire comme la somme d'une série entière.
D'après les résultats qui précèdent, **si c'est le cas** alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle de forme $]-R, R[$ et

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Définition (Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ où $r > 0$.
On appelle **série de Taylor** de f la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

III.1 Fonction développable en série entière

Définition (Développable en série entière)

Soit $r > 0$. Une fonction f, définie sur un intervalle I, est dite **développable en série entière** (DSE) sur $]-r, r[\subset I$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

⚠ **Attention** ⚠ Ne jamais écrire $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sans préciser le domaine de validité qui peut ne pas être l'ensemble de définition de f. Par exemple $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et l'égalité $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ n'est valable que pour $x \in]-1, 1[$.

Théorème (Unicité du DSE)

Soit $r > 0$. Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$ alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et le seul développement en série entière est la série de Taylor $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
Conséquence : s'il existe, le développement en série entière d'une fonction est unique.

Remarques

- Si une fonction paire (resp. impaire) est DSE alors tous ses coefficients d'indice impair (resp. pair) sont nuls.
- Une fonction DSE est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, la réciproque est fausse.

  Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas nécessairement DSE. Contre-exemple : $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

III.2 Rappels PCSI : formules de Taylor

Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soient $f \in \mathcal{C}^{p+1}(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle et $a \in I$. Alors:

$$\forall x \in I, \ \ f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{Polynôme en } x \text{ de degré } p} + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(p+1)}(t)}{p!}(x-t)^p \,\mathrm{d}t}_{\text{Reste intégral}}.$$

Corollaire (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient $f \in \mathcal{C}^{p+1}(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle et $(a, b) \in I^2$. Alors:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{[a,b]([b,a])} |f^{(p+1)}|.$$

Application à la recherche de DSE. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ où $r > 0$.
On définit :

- la **série de Taylor** de f en 0, c'est la série entière : $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$
- le **polynôme de Taylor** de f en 0 à l'ordre n, c'est le polynôme : $\displaystyle P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}X^k$
- le **reste de Taylor** de f en 0 à l'ordre n: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Il s'agit donc de prouver que : $\forall x \in]-r,r[, \quad R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour montrer que la somme de la série de Taylor est bien f.

La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors

Corollaire

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ où $r>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x\in]-r,r[$,

- $\displaystyle R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t$
- $\displaystyle |R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{[0,x]([x,0])}|f^{(n+1)}|.$

III.3 Développements en série entière usuels

Les développements en série entière à connaître par coeur.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad R=+\infty$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad R=+\infty$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R=+\infty$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad R=+\infty$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R=+\infty$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \qquad R=1$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \qquad R=1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \qquad R=1$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1} \qquad R=1$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\cdots \\ &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\end{aligned} \qquad R = \begin{cases}1 & \text{si } \alpha\notin\mathbb{N}\\ +\infty & \text{si } \alpha\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Remarques (Fonction polynomiale)

Une fonction polynomiale est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. La série entière a ses coefficients tous nuls à partir d'un certain rang.

Exemple Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

✎ **En pratique** ✎ On retiendra l'idée utilisée pour obtenir le DSE de $\ln(1+x)$ et celui de $\mathrm{Arctan}\,x$ à savoir partir du DSE de leur dérivée et intégrer. D'autres DSE peuvent être obtenus sur ce modèle.

Exemple Montrer que Arcsin est DSE et déterminer ce DSE.

✎ Méthode pratique ✎ (Montrer qu'une fonction admet un DSE à l'aide d'une équation différentielle)

Pour montrer qu'une fonction f admet un DSE, on utilise souvent la méthode de l'équation différentielle.

1) **Trouver un problème de Cauchy** (équation différentielle + condition initiale) donc f est l'unique solution.
2) **Recherche une solution développable en série entière** de ce problème, si elle existe. Pour cela on raisonne par analyse-synthèse, en supposant qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ tel que :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
Et on remplace dans l'equation différentielle. On utilise, pour tout $x \in]-R, R[$,
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$
3) Si elle existe, **déterminer le rayon de convergence** R de la série entière obtenue. S'il est non nul, du fait de l'unicité de la solution du problème de Cauchy sur $]-R, R[$, f et la somme de la série entière coincident sur $]-R, R[$ et donc f est DSE sur cet intervalle.

Exemple Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle
$$xy'' + y = 1.$$

IV Séries entières à variables complexe

Définition (Continuité d'une fonction de la variable complexe)

Soit D une partie de C et $f : D \to \mathbb{C}$.
Soit $z_0 \in D$. On dit que f est **contine en** z_0 si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists r > 0 \,/\, \forall z \in D, \ |z - z_0| \leqslant r \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème (Continuité de la somme)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

La fonction somme $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.

Corollaire (Continuité de $z \mapsto \mathrm{e}^z$ et $z \mapsto \frac{1}{1-z}$)

- $z \mapsto \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est continu sur $\mathbb{C}$.
- $z \mapsto \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est continu sur $D(0, 1)$.

V Quelques conseils pratiques

Savoir-faire

1) Calculer un rayon de convergence :
    - la convergence/divergence en un point donner une inégalité
    - règle de d'Alembert
    - en utilisant une combinaison linéaire ou un produit de Cauchy sur des séries entières dont on connaît le rayon
    - en reconnaissant la série obtenue par intégration terme à terme, ou dérivation terme à terme
    - par comparaison à des séries entières de référence (comparaison avec $\leqslant$, o, O, $\sim$)
2) Calculer la somme d'une série entière. A partir de sommes de séries entière usuelles, puis :
    - combinaisons linéaires
    - dérivation, intégration terme à terme.
3) Montrer qu'une fonction est DSE et trouver son DSE. A partir de fonction DSE
    - combinaisons linéaires
    - dérivation, intégration terme à terme.
4) Montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en la développant en série entière.
5) Utliser une équation différentielle pour déterminer le DSE d'une fonction.

Pièges à éviter - Erreurs classiques

- Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, il n'y a pas forcément convergence pour $|z| = R$.
  Il peut y avoir convergence mais il peut aussi ne pas y avoir covergence.
- Calculer un rayon de convergence ne se limite pas à la règle de d'Alembert.
- En général il n'y a pas convergence normale sur $]-R, R[$.
- Toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas forcément DSE.