IX. Réduction

- Endomorphisme diagonalisable (= il existe une base de vecteurs propres).
  Matrice diagonalisable(= semblable à une matrice carrée).
- Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ ($n = \dim E$) ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les 5 **conditions nécessaires et suffisantes** de diagonalisabilité du programme :
  (i) les sous-espaces propres (sep) sont supplémentaires
  (ii) la somme des dimensions des sep vaut n
  (iii) le polynome caractéristique est scindé et la multiplicité des vp est égale à la dimension des sep
  (iv) f (ou A) admet un polynôme annulateur scindé-simple
  (v) $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ est annulateur de f (ou A).

  Les 2 **condition suffisantes** de diagonalisabilité :
  (i) f (ou A) admet n vp deux à deux distinctes
  (ii) le polynôme caractéristique est scindé-simple.
- Endomorphisme trigonalisable (= il existe une base dans laquelle la matrice de f est triangulaire).
  Matrice trigonalisable(= semblable à une matrice triangulaire).
- **Condition nécessaire et suffisante** de trigonalisabilité : le polynôme caractérisique de f (ou A) est scindé.
  Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- Rappel de quelques techniques utiles :
  1) on calcule un rang pour calculer la dimension d'un sep
  2) on utilise la trace pour obtenir des informations sur les vp (une valeur propre manquante)
  3) on utilise autant que possible des relations sur les colonnes pour obtenir des vecteurs du noyau/sep.

X. Séries entières

- Rayon de convergence : définition et méthode de calculs (double inégalité, relation de comparaison, règle de d'Alembert).
- Opérations sur les séries entières et et propriété de leur rayon de convergence (somme et produit de Cauchy).
- Convergence normale de la série entière sur tout segment de $]-R, R[$.
- Régularité de la somme : continuité, intégration terme à terme, classe $\mathcal{C}^k$.
- Fonctions développables en série entière. Série de Taylor. Développements en série entière usuels.
- Recherche d'une solution DSE d'une équation différentielle sur des exemples.

Questions de cours (preuve à connaître)

- f est diagonalisable ssi les sep sont supplémentaires.
- Sur un exempple déterminer le terme général de la suite récurrente linéaire $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ dans le cas où l'équation caractéristique possède deux racines distinctes.
- $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)}^{n} \lambda \qquad \det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda$ par trigonalisation.
- $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
- DSE de $\lambda(1+x)$ et $\mathrm{Arctan}\, x$.
- DSE de $\cos x$ par deux méthodes.
- Rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Rappel des exemples traités en cours qui doivent être maitrisés :

- L'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, $f : P \mapsto P - P'$ n'est pas diagonalisable.
- Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.
- Diagonaliser, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}BP$). Puis calculer A^n.
- Diagonaliser, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}BP$).
- La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?
  La trigonaliser.
- Montrer que si A est diagonalisable et ne possède qu'une seule valeur propre α alors $A = \alpha I_n$.
- On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Deux méthodes pour étudier la diagonalisabilité ((1) : après avoir calculé A^2, (2) après avoir calculé $\mathrm{rg}\, A$)
- Rayon de convergence des séries entières $\sum \sin(n) z^n$, $\sum a_n z^n$ où a_n est le n-ième chiffre des décimales de $\sqrt{2}$, $\sum \frac{n}{n^2+n+1} z^n$, $\sum \frac{z^n}{(2n)!}$, $\sum \mathrm{e}^{\cos(n)} z^n$, $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$,$\sum \binom{2n}{n} z^{2n+1}$ (série lacunaire)

- En utilisant le produit de Cauchy de $\sum z^n$ par elle-même, donner le rayon de convergence de la série produit de Cauchy et calculer la somme.
- Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ en prouvant la convergence uniforme de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ sur $[0,1]$.
- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$xy'' + y = 1.$$