Suites de fonctions

Exercice 1. (♡) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'intervalle indiqué :

1) $f_n(x) = x^n(1-x)$, $I = \mathbb{R}$
2) $f_n(x) = \operatorname{Arctan}(nx)$, $I = \mathbb{R}$
3) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $I = \mathbb{R}$
4) $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 2. (♡♡)

1) Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$.
Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément mais pas $\left(f_n^2\right)$.
2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f, bornée sur I. Montrer que $\left(f_n^2\right)$ converge uniformément vers f^2.
Indication : Montrer que $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty$.

Exercice 3. (♡♡) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}_+$ qui converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{R}_+$.

1) Rappeler l'inégalité des accroissement finis dans le cas de $\varphi(u) = \ln(1+u)$ entre deux réels positifs.
2) Montrer que $\left(\ln\left(1+f_n\right)\right)_n$ converge uniformément vers $\ln(1+f)$.

Exercice 4. (♡) Pour $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^nx^2}$.

1) Déterminer la limite simple de la suite (f_n).
2) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}_+$, par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^nx^2}$.
On évitera un calcul de norme infinie en étudiant $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.

Séries de fonctions

Exercice 5. (♡) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^4x^2}$.

1) Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2) Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+^*$, mais que pour tout $a > 0$, la convergence est normale sur l'intervalle $[\,a, +\infty[$.

Exercice 6. (♡♡)

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right)$ et étudier sa continuité.
2) Pour tout réel $x > 0$, on pose $g_n(x) = x^2 f_n(x)$. Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum g_n$; en déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7. ($*$) On considère la fonction f définie par $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.

1) Déterminer le domaine D de définition de f. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.
2) Exprimer, pour tout réel $x\in D$, la quantité $xf(x)$ en fonction de $f(x+1)$.
3) Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
4) Donner un équivalent de f en 0^+.
5) En étudiant la série de fonctions qui définit $xf(x)$, déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 8. ($\heartsuit\heartsuit$) On pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f et étudier sa continuité.
2) A l'aide d'une comparaison série-intégrale montrer que $f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{2}{x^2}$.

Exercice 9. ($\heartsuit\heartsuit$) On définit la fonction $S:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+x)}$.

1) Déterminer le domaine de définition de $S(x)$.
2) Etudier la continuité de S (on précisera l'intervalle).
3) Pour $x\in]0,+\infty[$ fixé, on définit $\varphi:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ par $\varphi(t)=\dfrac{1}{t(t+x)}$.

   -a- Nature et valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t$.

   -b- A l'aide d'un encadrement, montrer que $S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ln x}{x}$.

Exercice 10. ($\heartsuit\heartsuit$) Soit $u_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{n}$ pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\geqslant 1$.

1) Déterminer l'ensemble de définition I de $S:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.
2) Montrer que S est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Exprimez $S'(x)$ pour tout $x\in I$, en déduire l'expression de f à une constante près.
4) Démontrer que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. En déduire l'expression de S.

Exercice 11. ($\heartsuit\heartsuit$) On pose $u_n(x)=\mathrm{e}^{-n^2x^2}$.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$. Étudier ses variations, sa continuité et sa limite en $+\infty$.
2) En étudiant la série de fonctions $\sum g_n$, où $g_n(x)=x^2f_n(x)$, déterminer la limite de $x^2f(x)$ en 0 .
3) Grâce à une comparaison série-intégrale, encadrer $f(x)$ pour tout $x>0$. En déduire la limite de $xf(x)$ en 0 . On utilisera que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice 12. ($*$) Pour $x>0$, on pose $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$

1) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Préciser le sens de variation de S.

3) Établir : $\forall x>0, \quad S(x+1)+S(x)=\frac{1}{x}$

4) Donner un équivalent de S en 0 .

5) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 13. ($*$) Pour $x>0$, on pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et, pour $x>1$, $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

1) Trouver un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1^+; on notera $e(x)$ cet équivalent.

2) Etudier les variations de $\phi : t\mapsto \frac{\ln t}{t}$. En déduire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Pour $x>1$, déterminer une relation entre $\zeta(x)$ et $f(x)$.

4) En déduire $f(1)$.

5) Montrer que $\zeta-e$ est prolongeable par continuité en 1.

Exercice 14. ($*$) Soit $u_n(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ pour $x\in\mathbb{R}_+$et $n\geqslant 1$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$ où $a>0$. On note S sa somme.

2. Soit $a=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$S(x)-\frac{a}{\sqrt{x}}=O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

Indication : penser à la quantité conjuguée.

Exercice 15. ($*$) Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$, on pose $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+x}}-2\sqrt{n}$.

1) Etudier la convergence simple de $\sum(f_{n+1}-f_n)$.

2) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 16. ($*$) On définit (u_n) la suite de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x)=1 \quad \text{ et } \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x)=1+\int_0^x u_n\left(t-t^2\right)\mathrm{d}t$$

1) Montrer que, pour tout $t\in[0,1], 0\leqslant t-t^2\leqslant t\leqslant 1$.

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\forall x\in[0,1], \quad 0\leqslant u_{n+1}(x)-u_n(x)\leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

3) Étudier la convergence simple de la série $\sum v_n$, où $v_n = u_{n+1} - u_n$, sur $[0,1]$. En déduire la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0,1]$.

4) Établir que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x) = u\left(x - x^2\right)$$

Echange somme-intégrale

Exercice 17. ($\heartsuit$)

1) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$.

2) Démontrer la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n(2n+1)}$.

Exercice 18. ($*$)

1) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt$.

2) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $|z| \neq r$. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - re^{it}}$.

Exercice 19. ($*$) Pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in [0,1]$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}$.

1) Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[0,1]$. On note f la somme de cette série de fonctions.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 20. ($*$) Pour tout entier n et tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(\sin x)^{2n+1}}{2^n}$ et $a_n = \dfrac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1) Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; calculer sa somme f.

2) Démontrer que, pour tout entier n, on a $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n$.

3) En déduire que la série $\sum a_n$ converge et calculer sa somme. On pourra penser au changement de variable $x = \operatorname{Arcos} t$ pour calculer une intégrale.

Exercice 21. ($**$) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3}$.