Exercice 1. (♡♡) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est diagonalisable et donner une matrice D semblable à A.
2) Achever la diagonalisation en déterminant P inversible tel que $D = P^{-1}AP$.
3) -a- Déterminer le commutant $C(D)$ de D c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec D (on rappelle que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).
   -b- En déduire la dimension de $C(A)$.

Exercice 2. (♡♡) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1) Sans calcul donner deux vecteurs propres et les deux valeurs propres associées de la matrice A.
   Déterminer alors rapidement toutes les valeurs propres et montrer que A est diagonalisable. On notera D une matrice semblable à A.
2) Déterminer les matrices N telles que $N^2 = D$. *Indication : on utilisera que N et D commutent.*
3) En déduire le nombre de matrices M telles que $M^2 = A$.

Exercice 3. (♡) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer rapidement que A est diagonalisable.

Exercice 4. (♡) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$

1) Sans calculer le polynôme caractéristique de A, déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que 2 soit valeur propre de A.
2) Toujours sans calculer χ_A, montrer que A est diagonalisable.

Exercice 5. (♡) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 3 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 6. (♡♡) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1) Par deux méthodes montrer que J est diagonalisable et déterminer les valeurs propres de J.
   -a- Méthode 1 : en calculant J^2, J^3.
   -b- Méthode 2 : en calculant le polynôme caractéristique.
2) Montrer alors que A est diagonalisable.

Exercice 7. (♡♡) Étudier, en fonction du paramètre réel α la diagonalisabilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1-\alpha & \alpha & 2 \\ -\alpha & 1 & \alpha \\ -2 & \alpha & 3-\alpha \end{pmatrix}$.

Exercice 8. (♡♡)

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A puis calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2) Calculer le terme général de la suite u définie par $u_0 = 1, u_1 = -2$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.

Exercice 9. (♡♡) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1) Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
2) On note e_1' un vecteur propre pour la plus grande des deux valeurs propres, et e_2' un vecteur propre pour l'autre valeur propre. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3)$ est une base de E. Donner la matrice T de l'application f dans la base $\mathcal{B}'$,
3) Calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 10. (♡♡) Soit S le système $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \end{cases}$ avec $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ fixés

1) Écrire le système sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$. Exprimer X_n en fonction de A, de X_0 et de n.
2) À l'aide des résultats de l'exercice précédent, exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et de n.

Exercice 11. (♡♡) Montrer qu'une somme (puis un produit) de matrices diagonalisables n'est pas forcément diagonalisable. *Indication: on pourra chercher des matrices* 2×2 *triangulaires.*

Exercice 12. (∗) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $M^\top$ est diagonalisable.

Exercice 13. (♡♡) À quelles conditions sur les coefficients a, b, c, d, e, f la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

Exercice 14. (∗) Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B le sont.

Exercice 15. (∗) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$

1) Calculer la matrice A^n. *Indication : on pourra poser* f *l'endomorphisme canoniquement associé à* A *et* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *et calculer* $f(e_j)$.
2) Montrer que A est diagonalisable.
3) Montrer alors que $\mathrm{Sp}(A) = \mathbb{U}_n$.

Exercice 16. $(*)$ Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des scalaires et M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{(appelée matrice compagnon).}$$

1) Soit λ une valeur propre de A. Calculer la dimension du sous-espace propre associé $E_\lambda(A)$.
2) En déduire que M est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
3) Déterminer le polynôme caractéristique de M.

Exercice 17. $(*)$ Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Déterminer valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & b \\ 0 & a & \ldots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \ldots & a & 0 \\ b & 0 & \ldots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que A est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres.

Exercice 18. $(\heartsuit\heartsuit)$

On définit l'application Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \Phi(P) = \left(X^2 - 1\right) P'' + XP'$$

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer la trace de Φ.
3) L'endomorphisme est-il diagonalisable?

Exercice 19. $(\heartsuit\heartsuit)$ Soit $A = X^4 - X$ et $B = X^4 - 1$ et f l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{C}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.
2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
3) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 20. $(*)$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, u_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $u_A(M) = MA$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle diagonalisable?
2) La matrice B est-elle diagonalisable? Si oui, préciser une base de vecteurs propres.
3) On pose :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-a- Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
-b- Calculer $u_A(E_{ij})$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant 2$. Donner la matrice de u_A dans la base $\mathcal{B}$.
-c- L'endomorphisme u_A est-il diagonalisable? Si oui, préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres de u_A (on rappelle qu'ici un vecteur propre sera une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

Exercice 21. ($*$) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace non nulle. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A \end{array}.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Déterminer le noyau de f.
3) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. Est-il diagonalisable ?

Exercice 22. ($**$) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que si f est diagonalisable, alors f^2 l'est aussi.
2) Montrer que la réciproque est fausse. *Indication : penser à* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) On suppose f bijective. Montrer que si f^2 soit diagonalisable, alors f est diagonalisable. *Indication : penser à la CNS utilisant les polynômes annulateurs.*
4) On suppose f non bijective. On suppose f^2 diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\ker f = \ker f^2$.

Exercice 23. ($*$) Soit f un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$.

1) Déterminer le spectre de f.
2) Démontrer que f est diagonalisable si, et seulement si, c'est l'endomorphisme nul.
3) Démontrer que $\det(\mathrm{Id}_E + f) = 1$.

Exercice 24. ($*$) Soit f un endomorphisme de rang 1 d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$.

1) Démontrer que 0 est valeur propre de f et déterminer la dimension de l'espace propre associé.
2) Démontrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{tr}(f) \neq 0$.
3) On suppose $\operatorname{tr}(f) = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que la matrice de f a tous ses coefficients nuls sauf celui en première ligne dernière colonne qui vaut 1.
4) Démontrer que $\det(\mathrm{Id}_E + f) = 1 + \operatorname{tr}(f)$.

Exercice 25. ($*$) E un espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On suppose que $A^2(A-I)^2 = 0$.
On note $F_0 = \operatorname{Ker} f^2$ et $F_1 = \operatorname{Ker}(f - id)^2$.

1) Montrer que $Sp(A) \subset \{0; 1\}$. En déduire que $2f - id$ est un automorphisme.
2) Montrer que F_0 et F_1 sont en somme directe.
3) Montrer que F_0 et F_1 sont supplémentaires.

Exercice 26. ($**$) Soient E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes.

1) Montrer qu'il existe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, base de E composée de vecteurs propre de f.
2) Montrer que si g est un endomorphisme de E qui commute avec f, alors la matrice de g dans $\mathcal{B}$ est diagonale.
3) En déduire que, si g commute avec f, alors il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(f) = g$.
4) Démontrer que les polynômes annulateurs de f sont les multiples de son polynôme caractéristique.
5) Démontrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un espace vectoriel de dimension n.