Exercice 1. (♡) Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} z^n$,
2) $\sum \frac{n^2}{3^n+n} z^n$,
3) $\sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{n} z^n$, en déduire celui de $\sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{n} z^{2n}$,
4) $\sum n! z^n$
5) $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$
6) $\sum (3n+1) z^{3n}$,
7) $\sum c_n z^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10 .

Exercice 2. (♡) Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes, et exprimer leur somme sur l'intervalle $]-R, R[$ à l'aide de fonctions usuelles.

1) $\sum_{n \geqslant 0} (2^n + 3^n) x^n$,
2) $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^n n!} x^{2n}$
3) $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n)!} x^{4n}$,
4) $\sum_{n \geqslant 0} n^2 x^n$
5) $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2}{(n+1)!} x^n$
6) $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2+1}{n+1} x^n$
7) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$,
8) $\sum_{n \geqslant 0} \cos(na) x^n$, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(na) x^n$, avec $a \in \mathbb{R}$

Exercice 3. (♡) Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière au voisinage de 0 , et calculer leur développement.

1) $\frac{\ln(1+x)}{x}$,
2) $\int_0^x e^{-t^2} dt$,
3) $\cos^2 x \sin x$,
4) $e^x \cos(x)$,
5) $\frac{1}{(1-t)^3}$,
6) $\frac{1}{(1+x)(2-x)}$
7) $\frac{1}{x^2+2x+2}$
8) $\frac{e^x}{1-x}$.

Exercice 4. (♡♡) Montrer que f, définie par $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)$.

Exercice 5. (∗) On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x\cos^2 t} dt$

1) Démontrer que F est définie sur $]-1;1[$.
2) Démontrer que F est développable en série entière sur $]-1;1[$: $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$ où W_n est une intégrale de l'on ne cherchera pas à calculer.
3) A l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$, calculer $F(x)$ en fonction de $x \in]-1;1[$.
4) En déduire W_n en fonction de n.

Exercice 6. (♡♡) On considère le problème de Cauchy suivant : $y' = xy + 1 \quad y(0) = 0$.

1) Soit $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que la fonction F est solution de l'équation différentielle sur $]-R, R[$. Déterminer a_0, a_1 ainsi qu'une relation de récurrence reliant, pour tout entier $n \geqslant 1, a_{n+1}$ à a_{n-1}.
2) Pour tout entier naturel $p \geqslant 0$, en déduire la valeur de a_{2p} et a_{2p+1}.
3) Déterminer R.

Exercice 7. (∗) Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes. On exprimera explicitement les solutions obtenues à l'aide des fonctions usuelles.

1) $y' - x^2 y = 0, y(0) = 1$;

2) $xy'' + 2y' + xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$;

Exercice 8. $(*)$ Soit $f : x \mapsto \text{Arcsin}^2 x$.

1) Justifier que f est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 1.
2) Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 que l'on déterminera.
3) En déduire le développement en série entière de f.

Exercice 9. $(\heartsuit\heartsuit)$ Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence de f.
2) Exprimer $(1-x)f(x) + \ln(1-x)$ comme la somme d'une série entière.
3) En déduire l'équivalence $f(x) \sim_{1^-} -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice 10. $(*)$ Étude de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série.
2) Calculer la somme de la série dérivée, en déduire une expression de la somme f sur un intervalle à préciser.
3) Étudier la convergence de la série sur $[-1, 1]$, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Exercice 11. $(*)$ Le but de l'exercice est de montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(4n+1)}$.

1) Développer $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ en série entière.
2) En déduire le développement de la primitive F de f s'annulant en 0 , sur un intervalle que l'on précisera.
3) Montrer que la série de fonctions précédente, de limite F, converge uniformément sur $[-1, 1]$. Conclure.

Exercice 12. $(\heartsuit\heartsuit)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = -2(2n-1)a_n$.
2) Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, puis montrer que sa somme f est solution sur $]-R, R[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera.
3) En déduire f.

Exercice 13. $(*)$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et $f(x) = \exp(-1/x)$ pour $x > 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp(-1/x)$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
5. f est-elle développable en série entière?