Chapitre
Variables aléatoires

I Variables aléatoires discrètes

I.1 Quelques rappels

Définition (Variable aléatoire discrète)

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une **variable aléatoire** discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application de Ω dans un ensemble E telle que :

- l'image de Ω, $X(\Omega)$ est une partie au plus dénombrable de E
- pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{A}$.

Rappels définitions et notations.

- $X(\Omega) = \{X(\omega) \,/\, \omega \in \Omega\}$ est l'ensemble des valeurs prises par X, appelé **univers-image** de X.
  Il est au plus dénombrable, ce sera souvent $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = x\}$ est un événement (un élément de la tribu) noté $(X = x)$.
- Pour toute partie B de E, $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \in B\}$ est un événement noté $(X \in B)$.
  Dans le cas où $B = \{x\}$, il est noté $(X = x)$.
  Dans le cas ou $B =]-\infty, x]$, il est noté $(X \leqslant x)$.
  Dans le cas ou $B = [x, +\infty[$, il est noté $(X \geqslant x)$.

- On considère f une application définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble E.
  Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire, que l'on note $f(X)$. Exemple : X^2, $|X|$...
- Loi P_X de X. On définit la probabilité P_X sur $X(\Omega)$ Pour toute partie B de $X(\Omega)$, si $B = \{b_i \,/\, i \in I\}$ où I est au plus dénombrable et les b_i sont deux à deux distincts, on définit :
  $$P_X(B) = P(X \in B) = \sum_{i \in I} P(X = b_i) = \sum_{b \in B} P(X = b).$$
- Si X et Y sont deux variables aléatoires suivant la même loi, c'est-à-dire $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et $P_X = P_Y$, on note $X \sim Y$.

✎ Méthode pratique ✎ (Reconnaître une loi de probabilité)

Soit $(p_i)_{i \in I}$ une suite de réels et X une variable aléatoire d'univers-image $X(\Omega) = \{x_i \,/\, i \in I\}$ telle que :
$$\forall i \in I, \quad P(X = x_i) = p_i.$$
Pour montrer que $(p_i)_{i \in I}$ définit bien une loi de probabilité on vérifie :

- $\forall i \in I$, $p_i \geqslant 0$
- $\displaystyle\sum_{i \in I} p_i = 1$.

Exercice. Pour une variable aléatoire réelle X telle que $X(\Omega) = \mathbb{Z} \backslash \{-1, 0\}$, on pose :
$$\forall n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1, 0\}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}$$
Vérifier que ceci définit bien une loi de probabilité pour X.

I.2 Lois usuelles

I.2.a Loi uniforme

Définition (Loi uniforme)

On dit que la variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur l'ensemble $E = [\![a, b]\!]$ (de cardinal $n = b-a+1$) si

$$X(\Omega) = [\![a, b]\!] \qquad \forall k \in [\![a, b]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note $X \sim \mathcal{U}([\![a, b]\!])$.

Exemple. On lance un dé normal à 6 faces. La variable aléatoire qui indique le numéro sorti suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

I.2.b Loi de Bernoulli

Définition (Loi de Bernoulli)

Soit $p \in]0, 1[$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p si

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \qquad P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Exemple. On lance une pièce truquée qui fait pile avec probabilité p et face avec probabilité $1 - p$. La variable aléatoire valant 1 si on obtient pile et 0 si on obtient face suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

☞ **Explication** ☜ La loi de Bernoulli modélise un événement aléatoire qui ne peut avoir que deux issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1 - p$.

I.2.c Loi binomiale

Définition (Loi binomiale)

Soit $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p si

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \qquad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Exemple. On lance n fois une pièce truquée qui fait pile avec probabilité p et face avec probabilité $1 - p$. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de piles obtenus. Alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

☞ **Explication** ☜ La loi binomiale de paramètre n, p modélise une expérience aléatoire comptant le nombre de succès (de probabilité pile) dans la répétition indépendante de n expériences de type succès-échec.
On rappelle qu'une variable aléatoire suivant une loi binomiale est la somme de variable aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p.

Exercice. Soit T une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(6, p)$ et la fonction polynomiale $Q = X^2 + TX + T + 1$. Déterminer la probabilité que le polynôme Q admette au moins une racine réelle.

I.2.d Loi géométrique

Définition (Loi géométrique)

Soit $p \in]0,1[$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre p si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = p^{k-1}(1-p).$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exemple. On lance une pièce truquée qui fait pile avec probabilité p et face avec probabilité $1-p$. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un pile. Alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.

☞ **Explication** ☜ La loi géométrique est aussi appelée **la loi du premier succès** dans une succession d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

I.2.e Loi de Poisson

Définition (Loi de Poisson)

Soit $\lambda > 0$ un réel. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarques (Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson)

Si, pour tout $n, X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Donc, dans la pratique, lorsque $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, le calcul de $\mathbb{P}(X_n = k)$ devient difficile lorsque n est grand. On cherche alors une approximation en supposant que X_n suit une loi de Poisson plutôt qu'une loi binomiale. De façon théorique, il faut vérifier que np_n a une limite finie λ. En pratique, on se contentera des conditions : n est grand ($n \geqslant 50$) et p_n petit ($p_n \leqslant 0,1$) et $np_n \leqslant 15$ (np_n sera alors une approximation de λ). Du coup, on utilisera la loi de Poisson dans le cas des petites probabilités ou d'événements rares (c'est-à-dire des événements avec une probabilité faible dans un intervalle de temps donné), par exemple : le nombre de fautes d'impression dans les pages d'un livre, le nombre de personnes atteintes d'une maladie, le nombre d'accidents sur une portion de route.
La loi de Poisson est pour cette raison aussi appelée **loi des événements rares**.

II Espérance d'une variable aléatoire

Dans cette partie $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

II.1 Définitions et formules de calculs

Définition (Espérance d'une variable aléatoire à valeurs positives)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[0,+\infty]$. L'**espérance** de X est le nombre noté $E(X)$ de $[0,+\infty]$ défini par

$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x).$$

On di que la variable aléatoire est d'espérance finie si $E(X) < +\infty$.

Remarques (Cas où X prend la valeur $+\infty$)

On a déjà vu des exemples où une variable aléatoire peut prendre la valeur $+\infty$ (temps d'attente d'un succès). Par convention $xP(X=x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X=+\infty) = 0$.
Si $P(X=+\infty) > 0$ alors $+\infty P(X=+\infty) = +\infty$ et l'espérance est alors elle aussi égale à $+\infty$.

Remarques (Cas particuliers)

- Cas $X(\Omega)$ fini et contient des valeurs finie. Posons $X(\Omega) = \{x_1,\ldots,x_n\}$, dans ce cas

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_iP(X=x_i).$$

- Cas $X(\Omega) = \{x_n \,/\, n\in\mathbb{N}\}$. Dans ce cas

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_nP(X=x_n).$$

(On rappelle que l'ordre de sommation n'importe pas pour une famille positive).

Théorème (Espérance des lois usuelles)

1) Si la variable aléatoire X suit une loi constante de valeur a alors $E(X) = a$.
2) Si la variable aléatoire X suit une loi uniforme $X \sim \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.
3) Si la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $E(X) = p$.
4) Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $E(X) = np$.
5) Si la variable aléatoire X suit une loi géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$.
6) Si la variable aléatoire X suit une loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$.

Exercice. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in]0,1[$.
On pose $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Calculer $E(Y)$.

Théorème (Formule de l'antirépartition)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On a alors :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n).$$

On retient ce résultat pratique.

✎ Méthode pratique ✎ ($P(X = n)$ à l'aide de $P(X \leqslant n)$ et $P(X \geqslant n)$)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Parfois il est plus simple de calculer $P(X \leqslant k)$ ou $P(X \geqslant k)$ on utilise alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P(X = n) = P(X \leqslant n) - P(X \leqslant n-1)}$ découlant de $(X \leqslant n) = (X \leqslant n-1) \sqcup (X = n)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1)}$ découlant de $(X \geqslant n) = (X \geqslant n+1) \sqcup (X = n)$

Exemple Retrouver l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique grâce à la formule de l'antirépartition.

Exercice. Dans une urne, il y a une boule rouge et une boule verte. On tire une boule. Si elle est rouge, on arrête et si elle est verte on la remet avec une rouge supplémentaire et on recommence.
On note X le nombre de tirages effectués. On convient que $X = +\infty$ lorsqu'on n'obtient jamais de boule rouge.

1) Calculer $P(X = +\infty)$.
2) X est-elle d'espérance finie et si oui que vaut son espérance?

Définition (Espérance d'une variable aléatoire à valeurs complexes)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que la variable aléatoire X est **d'espérance finie** si la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable c'est à dire $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X = x) < +\infty$.

Si c'est le cas, l'espérance de X est le complexe

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Remarques (Cas particuliers)

- Cas $X(\Omega) = \{x_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.
  X est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ converge absolument. Dans ce cas

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n).$$

- Cas $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
  X est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum nP(X = n)$ converge (absolument). Dans ce cas

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n).$$

Exercice. Retour sur l'exemple de la variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{Z}\backslash\{-1, 0\}$, et

$$\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, 0\}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

X est-elle d'espérance finie?

Définition (Variable aléatoire centrée)

On dit qu'une variable aléatoire X est **centrée** si $E(X) = 0$.

II.2 Propriétés de l'espérance

Théorème (Théorème de transfert)

Soient X une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \to \mathbb{C}$ une fonction.
La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas

$$E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$

☞ **Explication** ☜ Ce théorème permet d'indexer la somme définissant l'espérance de $Y = f(X)$ par l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X et non la variable aléatoire Y comme la définition l'exige. D'où le nom de théorème de transfert.

Remarques (Cas particuliers)

- Cas $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
  $f(X)$ est d'espérance finie (c'est une somme finie) et
  $$E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)P(X = x_k).$$
- Cas $X(\Omega) = \{x_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ converge absolument. Dans ce cas
  $$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n).$$

Théorème (Linéarité de l'espérance)

1) Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérance finie.
   Pour tous complexes a et b, alors la variable aléatoire $aX + bY$ est encore d'espérance finie, donnée par
   $$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$
2) Conséquence : soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires d'espérance finie. Alors $X_1 + \dots + X_n$ est encore d'espérance finie, avec
   $$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Exercice. Soit X une variable aléatoire d'espérance finie. Montrer que $X - E(X)$ est centrée.

Exercice Soit $p \in [0,1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine O. A chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite ou d'une unité vers la gauche avec les probabilités respectives p et $1-p=q$. A l'instant initial la puce est à l'origine. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n l'abscisse de la puce à l'instant n. Déterminant l'espérance de X_n.

NB: l'exemple précédent montre qu'il n'est pas toujours nécessaire de déterminer la loi d'une variable aléatoire pour en obtenir l'espérance.

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $|X| \leqslant Y$. Si Y est d'espérance finie alors X l'est aussi.

Théorème (Positivité, croissance)

Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérance finie.

- **Positivité** Si X ne prend que des valeurs positives alors $E(X) \geqslant 0$.
- **Croissance** Si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Exercice Un résultat utile. Soient X une variable aléatoire et a, b réels tels que $X(\Omega) \subset [a,b]$. Montrer que $a \leqslant E(X) \leqslant b$.

Proposition

Si X est à valeurs positives et d'espérance nulle alors l'événement $(X=0)$ est presque sûr.

III Variance

Dans cette partie $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

III.1 Définitions et propriétés

L'espérance d'une variable aléatoire représente sa moyenne. La variable $|X - E(X)|$ mesure l'écart à la moyenne; on peut s'intéresser à l'espérance de cette variable aléatoire pour mesurer la dispersion de X autour de la moyenne. La présence de la valeur absolue rend les choses peu exploitables, on préfère s'intéresser à l'espérance de son carré soit $E\left((X-E(X))^2\right)$

Définition (Variance)

Soit X une variable aléatoire. Si la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ est d'espérance finie, on définit la **variance** de X par

$$V(X) = E\left((X-E(X))^2\right).$$

Conséquence : la variance est positive.

Dans la pratique, pour vérifier que X est de variance finie, on peut se contenter de vérifier que X^2 est d'espérance finie et on dispose alors d'une formule pratique.

Théorème (Formule de Konig-Huyghens)

Soit X une variable aléatoire. Si X^2 est d'espérance finie alors X et $(X - E(X))^2$ le sont aussi avec

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

✎ Méthode pratique ✎ (Calcul pratique de $E(X^2)$)

Parfois pour calculer $E(X^2)$ il est plus pratique de de calculer $E(X(X+1))$ ou $E(X(X-1))$ on utilise alors

$$E(X^2) = E(X(X+1)) - E(X) \qquad\qquad E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X).$$

Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}.$$

1) Calculer a pour que X soit effectivement une variable aléatoire.
2) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$ dans ce cas. *Indication : calculer* $E(X+1)$, $E(X(X+1)$.

Définition (Ecart-type)

Soit X une variable aléatoire de variance finie. On définit son **écart-type** par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Définition (Variable aléatoire réduite)

On dit qu'une variable aléatoire X est **réduite** si $V(X) = 1$.

Théorème (Propriétés de la variance)

Soit X une variable aléatoire admettant une variance finie.
Alors, pour tous réels a, b, la variable aléatoire $aX + b$ est de variance finie, avec

$$V(aX + b) = a^2V(X) \qquad\qquad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Exercice. Soit X une variable aléatoire de variance finie non nulle. Montrer que $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée-réduite. C'est la variable aléatoire **centrée-réduite** associée à X.

III.2 Variance de lois usuelles

Théorème (Variance des lois usuelles)

1) Si la variable aléatoire X suit une loi constante de valeur a alors $V(X) = 0$.
Réciproquement, si une variable aléatoire X vérifie $V(X) = 0$ alors il existe un réel a tel que $P(X = a) = 1$.
2) Si la variable aléatoire X suit une loi uniforme $X \sim \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ alors $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$ où $n = b - a + 1$ est le nombre de valeurs prises.
3) Si la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $V(X) = p(1 - p)$.
4) Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $V(X) = np(1 - p)$.
5) Si la variable aléatoire X suit une loi géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $V(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}$.
6) Si la variable aléatoire X suit une loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $V(X) = \lambda$.

IV Fonctions génératrices

IV.1 Définitions

Dans cette partie $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

On a utilisé à plusieurs reprises une série entière $\sum P(X = n)t^n$ pour calculer des espérances ou des variances. On peut généraliser cette technique.

Théorème-Définition (Fonction génératrice)

- La série entière $\sum P(X = n)t^n$ à un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, elle converge donc pour tout réel $t \in [-1, 1]$.
- La somme de cette série est appelée **fonction génératrice** de X, notée G_X :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n = E\left(t^X\right).$$

Remarques (Cas d'un univers-image fini)

Si $X(\Omega)$ est fini alors G_X est une fonction polynomiale.

Exercice.

1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer la fonction génératrice de X.
2) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Déterminer la fonction génératrice de X.

Théorème (Propriétés de G_X)

1) $G_X(1) = 1$.
2) On pose $u_n : t \mapsto P(X = n)t^n$. La série $\sum u_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
3) G_X est continue sur $[-1, 1]$.

✎ Méthode pratique ✎ (Obtenir la fonction génératrice à l'aide de la loi)

Pour obtenir la fonction génératrice connaissant la loi $(P(X=n))_{n\in\mathbb{N}}$ il faut calculer une somme de série entière.

Théorème (La loi est caractérisée par la fonction génératrice)

Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont la même fonction génératrice si et seulement si elles ont la même loi.

✎ Méthode pratique ✎ (Obtenir la loi à l'aide de la fonction génératrice)

Pour obtenir la loi d'une variable aléatoire soit les valeurs $(P(X=n))_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de la fonction génératrice G, il faut développer G en série entière et identifier les coefficients.

Exercice. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall t \in [-1,1]$, $G_X(t) = \dfrac{1}{2-t}$. Déterminer la loi de X.

☞ **Explication** ☜ On en déduit que pour trouver la loi d'une variable aléatoire, il suffit de déterminer sa fonction génératrice.

IV.2 Fonction génératrice des lois usuelles

Théorème (Fonction génératrice des lois usuelles)

1) Si la variable aléatoire X suit une loi constante de valeur a alors $E(X)=a$.
2) Si la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = 1-p+pt.$$
3) Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = (1-p+pt)^n.$$
4) Si la variable aléatoire X suit une loi géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors
$$\forall t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[, \quad G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$
5) Si la variable aléatoire X suit une loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.$$

✎ **En pratique** ✎ Le programme de PC écrit explicitement : "les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson".

IV.3 Espérance et variance

Théorème (Espérance)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. X est d'espérance finie si et seulement si sa fonction génératrice est dérivable en 1. Dans ce cas :

$$E(X) = G'_X(1).$$

Théorème (Variance)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. X^2 est d'espérance finie si et seulement si sa fonction génératrice est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas :

$$E(X(X-1)) = G''_X(1) \qquad V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

✎ **En pratique** ✎ Plutôt que d'apprendre par coeur cette formule de $V(X)$, savoir la retrouver en partant de :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X)^2).$$

Remarques (Cas $X(\Omega)$ fini)

Si $X(\Omega)$ est fini, G_X étant polynomiale est dérivable une et deux fois en 1 donc ces formules sont vérifiées sans hypothèses supplémentaires

$$E(X) = G'_X(1) \qquad V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

V Résumé

Nom	Paramètres	Notation	$X(\Omega)$	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$	$G_X(t)$	$t \in$
Bernoulli	$p \in]0,1[$	$\mathcal{B}(p)$						
Binomiale	$p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{B}(n,p)$						
Uniforme sur $[\![a,b]\!]$	$(a,b) \in \mathbb{Z}^2$	$\mathcal{U}([\![a,b]\!])$					Pas à connaître	Pas à connaître
Uniforme sur $[\![1,n]\!]$	$n \in \mathbb{N}^*$	$\mathcal{U}([\![1,n]\!])$					Pas à connaître	Pas à connaître
Poisson	$\lambda > 0$	$\mathcal{P}(\lambda)$						
Géométrique	$p \in]0,1[$	$\mathcal{G}(p)$						