

CHAPITRE

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

C'est un chapitre de révision de PCSI.

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre sont des \mathbb{R} -espace vectoriels.

Dans ce qui suit, E désigne alors un tel \mathbb{R} -espace vectoriel.

I Espaces préhilbertiens

I.1 Produit scalaire

Définition (Produit scalaire)

- On appelle **produit scalaire sur E** toute forme **bilinéaire, symétrique, définie-positive** c'est-à-dire toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $(x, y) \mapsto (x | y)$ qui vérifie

(i) **bilinéaire** :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \mu \varphi(y, z) \quad (\text{linéarité à gauche})$$

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x, z) \quad (\text{linéarité à droite}).$$

(ii) **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

(iii) **définie** : $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

(iv) **positive** : $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geq 0$.

Lorsque E est muni d'un produit scalaire, on dit que E est un **espace préhilbertien réel**.

- **Notation.** φ est souvent noté $(\cdot | \cdot)$ ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

- **Espace euclidien.** Un espace vectoriel de **dimension finie** muni d'un produit scalaire est appelé espace vectoriel euclidien.

Exemples Produits scalaires usuels à connaître

1) **Dans $\vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$** :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in (\vec{\mathcal{P}})^2, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

2) **Dans \mathbb{R}^n** :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad (x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{où} \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

3) **Dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$** (où $a < b$) :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}))^2, \quad (f | g) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

4) **Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$** :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2, \quad (A | B) = \text{Tr}(A^\top B) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} b_{ij}$$

Exercice.

- 1) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- 2) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Remarques

- La bilinéarité implique que $(x|0_E) = (0_E|x) = 0$ pour tout $x \in E$.
Donc l'implication réciproque de la propriété "définie" est vraie : $x = 0_E \Rightarrow (x|x) = 0$.
- Bien noter que : "symétrie" + "linéarité à gauche" \Rightarrow " bilinéarité".

 **En pratique**  pour montrer la bilinéarité, on prouve d'abord la symétrie, puis la linéarité à gauche. La bilinéarité en découle.

I.2 Norme

Définition (Norme)

- La **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ est l'application

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}.\end{aligned}$$

- La **distance euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ est l'application

$$\begin{aligned}d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\|.\end{aligned}$$

Exemples Norme euclidienne associée au produit scalaire usuel

- 1) Dans \mathbb{R}^n :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{où} \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

- 2) Dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$:

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}.$$

- 3) Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sqrt{\text{Tr}(A^\top A)}.$$

Théorème (Inégalités et égalités fondamentales)

Soit E un espace préhilbertien muni du ps $(\cdot | \cdot)$.

1) **Homogénéité :**

$$\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

2) **Séparation :**

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E.$$

3) **Identité remarquable (très utile) :**

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y).}$$

4) **Inégalité de Cauchy-Schwarz :**

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

5) **Inégalité triangulaire :**

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens.

6) **Identité du parallélogramme :**

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

7) **Identités de polarisation :**

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x | y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Explication Interprétation géométrique.

Inégalité triangulaire

Identité du parallélogramme

Remarques

- Les propriétés 1), 2) et 5) montrent que $x \mapsto \|x\|$ est bien une norme sur E , appelée norme euclidienne.
- Les identités de polarisation 7) permettent de retrouver l'expression du produit scalaire à partir de la norme.
- L'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n se réécrit, pour tout (x_1, \dots, x_n) , (y_1, \dots, y_n) de \mathbb{R}^n ,

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le produit scalaire usuel sur $C([a, b], \mathbb{R})$ se réécrit, pour tout f, g de $C([a, b], \mathbb{R})$,

Exercice. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$.

II Orthogonalité

II.1 Définitions

Définition (Orthogonalité et vecteurs)

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée.

- Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont **orthogonaux**, que l'on note $x \perp y$, si $(x | y) = 0$.
- Soit $x \in E$. x est dit **unitaire** ou **normé** si $\|x\| = 1$.
- La famille de vecteurs de E , $(x_i)_{i \in I}$, est une **famille orthogonale** si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \Rightarrow (x_i | x_j) = 0.$$

- La famille de vecteurs de E , $(x_i)_{i \in I}$, est une **famille orthonormale** si la famille est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad (x_i | x_j) = \delta_{ij}.$$

- Si E est de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .
 \mathcal{B} est une **base orthogonale/orthonormale** si \mathcal{B} est une famille orthogonale/orthonormale

Exemples

- 1) Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire usuel. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $u_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $v_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$ sont orthogonaux.
- 2) Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel :

- $(1, 3, 2)$ et $(1, -1, 1)$ sont orthogonaux
 - la base canonique $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base orthonormale
- 3) Dans \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel, la base canonique est une base orthonormale.
- 4) Sur $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$. Alors $X \perp X^2$, car :
 $(1, X, X^2)$ est-elle une base orthonormale pour ce produit scalaire ?
- 5) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, la base canonique est une base orthonormale.

⚠️ Attention ⚠️ Deux vecteurs peuvent être orthogonaux pour un produit scalaire sans l'être pour un autre produit scalaire.

Théorème (de Pythagore)

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel.

1) Soient x et y deux vecteurs E alors : $x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

2) Soit (x_1, \dots, x_n) une famille orthogonale alors : $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

Théorème (Liberté d'une famille orthogonale)

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel. Une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est libre.
Conséquence : une famille orthonormale est libre.

Théorème (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit (e_1, \dots, e_n) une famille libre de E . Il existe une famille orthonormale (u_1, \dots, u_n) de E telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k).$$

Elle se calcule par récurrence:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \\ u_{k+1} = \frac{e_{k+1} - \sum_{i=1}^k (u_i | e_{k+1}) u_i}{\left\| e_{k+1} - \sum_{i=1}^k (u_i | e_{k+1}) u_i \right\|} \end{cases}.$$

💡 Méthode pratique 💡 (Déterminer une base orthonormale)

Pour construire une bon de F sev de E de dimension finie.

- On détermine une base de F .
- On l'orthonormalise avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Les trois premiers vecteurs sont :

$$u_1 =$$

$$u_2 =$$

$$u_3 =$$

Corollaire (Existence d'une base orthonormale)

Tout espace euclidien différent de $\{0_E\}$ possède une base orthonormale.

Exercice.

- 1) Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, déterminer une base orthonormée du plan $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$.
- 2) Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$, déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Toute famille orthonormée d'un espace euclidien E peut être complétée en une base orthonormée de E .

Théorème (Coordonnées, produit scalaire dans une base orthonormale)

Soit E un espace euclidien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

- 1) **Coordonnées dans une base.** Soit $x \in E$, alors :
$$x = \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k.$$

Les coordonnées de x dans la base (e_1, \dots, e_n) sont donc $((x | e_1), \dots, (x | e_n))$.

- 2) **Expression du produit scalaire dans une base.**

Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$. Alors:

$$(x | y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

- 3) **Matriciellement**, si $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ alors $(x | y) = X^\top Y$ et $\|x\| = \sqrt{X^\top X}$.

⚠️ Attention ⚠️ Ces formules sont fausses quand la base n'est pas orthonormale.

Exercice.

- 1) Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$. Déterminer les coordonnées de $X^2 - 2X + 3$ dans la base orthonormée trouvée plus haut.

II.2 Sous-espaces vectoriels et orthogonalité

Définition (Sous-espace vectoriel et orthogonalité)

Soient E un espace préhilbertien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

- Soit $u \in E$. On dit que u est **orthogonal à F** , noté $u \perp F$ si **tout vecteur** de F est orthogonal à u i.e.

$$\forall v \in F, (u | v) = 0.$$

- On dit que F et G sont **orthogonaux**, noté $F \perp G$, si **tout vecteur** de F est orthogonal à **tout vecteur** de G i.e.

$$\forall u \in F, \forall v \in G, (u | v) = 0.$$

Exemples

1) $\{0_E\} \perp F$, pour tout F sous-espace vectoriel de E .

2) Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire usuel :

- $\mathbb{R} \times \{0\} \perp \{0\} \times \mathbb{R}$
- donner un sous-espace vectoriel orthogonal à F d'équation $2x - 5y = 0$.

Théorème (CNS d'orthogonalité à l'aide d'une famille génératrice)

Soit E un espace préhilbertien.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de familles génératrices respectives (e_1, \dots, e_p) et (e'_1, \dots, e'_q) et soit u un vecteur de E .

- $u \perp F \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (u | e_i) = 0.$
- $F \perp G \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, (e_i | e'_j) = 0.$

NB: les familles génératrices (e_1, \dots, e_p) et (e'_1, \dots, e'_q) ne sont pas forcément des bases.

Exercice Dans \mathbb{R}^3 , muni du produit scalaire usuel, soient $F = \{(x, y, z) \in x - 2y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((-1, 2, -1))$. Montrer que $F \perp G$.

Théorème (Orthogonalité et somme directe)

Soit E un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

- 1) Deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux sont en somme directe.
- 2) Soient F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux.

Alors la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe. Cette somme est notée $\overset{\perp}{\oplus} F_i$ et est appelée **somme directe orthogonale** des F_i où $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

II.3 Orthogonal d'une partie de E

Définition (Orthogonal d'une partie de E)

Soit E un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$. Soit A une partie non vide de E . L'ensemble, noté A^\perp , appelé **orthogonal de A** est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A i.e.

$$A^\perp = \{u \in E / \forall v \in A, (v | u) = 0\}.$$

Remarques

Si F et G sont des sev de E : $F \perp G \Leftrightarrow F \subset G^\perp \Leftrightarrow G \subset F^\perp$.

Théorème (L'orthogonal est un sev)

- 1) Soit A une partie non vide de E . A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .
- 2) Soit u un vecteur non nul de E . $\{u\}^\perp$, noté aussi u^\perp est un hyperplan de E .

Théorème (Propriétés fondamentales de l'orthogonal d'un s.e.v.)

Soit E un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

- 1) F^\perp et F sont en somme directe.
- 2) **Si F est de dimension finie** : F^\perp est un supplémentaire de F dans E orthogonal à F , qui vérifie donc

$$F \perp F^\perp \quad F \oplus F^\perp = E \quad \text{noté aussi} \quad F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E.$$

Si E est de dimension finie alors

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Exemples

- 1) Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire usuel, on considère $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$. Déterminer F^\perp et $(3, 4)^\perp$.
 - 2) **A connaître** : soit E un espace vectoriel préhilbertien.
- | | |
|-------------------|-------------|
| $\{0_E\}^\perp =$ | $E^\perp =$ |
|-------------------|-------------|
- 3) Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t) dt$ on pose $F = \text{Vect}(X)$. Déterminer F^\perp .
 - 4) Dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire usuel. On pose $u = (1, -1, 2, 0)$, $v = (0, 1, 2, 0)$ et $F = \text{Vect}(u, v)$. Déterminer une base de F^\perp .

Méthode pratique (Déterminer l'orthogonal d'un sev de dimension finie)

On cherche à déterminer F^\perp .

Si l'on connaît une **famille génératrice** $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de F , alors

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (x | \varepsilon_k) = 0.$$

Ce qui ramène à la résolution d'un système de p équations.

Remarques (Cas des hyperplans)

- **Caractérisation des hyperplans.** Si H est une partie d'un espace euclidien alors H est un hyperplan si et seulement s'il existe un vecteur non nul tel que $H = u^\perp$. u est appelé **vecteur normal** du plan.
- **Lecture d'un vecteur normal sur une équation.** Si dans une bon H admet pour équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ alors u de coordonnées (a_1, \dots, a_n) dans cette bon est un vecteur normal à A .

II.4 Projecteurs orthogonaux

Définition (Projecteurs orthogonaux)

Soient E un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ et F un sous-espace vectoriel de E , **de dimension finie**.

Dans ce cas F et F^\perp sont supplémentaires dans E , et on appelle projection orthogonale (ou projecteur orthogonal) sur F , la projection sur F parallèlement à F^\perp :

$$\begin{array}{rcl} p_F : & E = F \oplus F^\perp & \rightarrow E \\ & u = u_F + u_{F^\perp} & \mapsto p_F(u) = u_F \end{array} .$$

NB : l'application $s_F : \begin{array}{rcl} E = F \oplus F^\perp & \rightarrow & E \\ u = u_F + u_{F^\perp} & \mapsto & p_F(u) = u_F - u_{F^\perp} \end{array}$ est la symétrie orthogonale associée.

Rappel de quelques propriétés d'algèbre linéaire :

Théorème (Caractérisation d'un projecteur orthogonal)

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit p un projecteur de E .
 p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$.

Exercice. Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et p l'endomorphisme canoniquement associé à A . Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Théorème (Expression de la projection dans une b.o.n.)

Soient E un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et (e_1, \dots, e_n) une **b.o.n.** de F . Soit p_F la projection orthogonale sur F .

- **Expression de la projection dans une bon :**

pour tout $u \in E$,

$$p_F(u) = \sum_{k=1}^n (u | e_k) e_k$$

$$\|p_F(u)\|^2 = \sum_{k=1}^n (u | e_k)^2.$$

- **Inégalité de Bessel :** pour tout $u \in E$, $\|p_F(u)\| \leq \|u\|$.

Remarques (Lien avec le procédé de Gram-Schmidt)

Dans le procédé de Gram-Schmidt, remarquez que le vecteur obtenu à l'étape $p+1$ avant normalisation est e_{p+1} moins le projeté orthogonal de e_{p+1} sur $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$:

$$e_{p+1} - \underbrace{\sum_{i=1}^p (e_{p+1} | u_i) u_i}_{p\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)(e_{p+1})} .$$



Méthode pratique (Déterminer l'expression du projeté orthogonal)

On veut déterminer l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur u de E sur F de dimension finie.

- **Méthode 1** : on détermine une base (e_1, \dots, e_n) de F (**forcément orthonormale**), et on utilise l'expression du projeté orthogonal du théorème ci-dessus : $p_F(u) = \sum_{k=1}^n (u | e_k) e_k$.
- **Méthode 2** : on détermine une base (e_1, \dots, e_n) de F (**pas forcément orthonormale**), et on caractérise $p_F(u)$ par l'orthogonalité de $u - p_F(u)$ aux vecteurs de la base de F (posée au début) :

$$u - p_F(u) \perp F \Leftrightarrow \begin{cases} u - p_F(u) \perp e_1 \\ \dots \\ u - p_F(u) \perp e_1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} (u - p_F(u) | e_1) = 0 \\ \dots \\ (u - p_F(u) | e_n) = 0 \end{cases} .$$

Ce qui mène souvent à un système de n équations dont les n inconnues sont les coordonnées de $p_F(u)$ dans la base (e_1, \dots, e_n) .

Exercice.

- 1) Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, déterminer la projection orthogonale de $u = (1, 2, 3)$ sur $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.
Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F .
- 2) **A retenir.** Soit E un espace préhilbertien et u un vecteur non nul.
 - Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur la droite $\text{Vect}(a)$.
 - Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur l'hyperplan $(\text{Vect}(a))^\perp$.
- 3) Dans $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème-Définition (Théorème de minimisation / Distance d'un vecteur à un sev de dim finie)

Soient E un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, F un sous-espace vectoriel de E de **dimension finie** et $u \in E$.

- On appelle **distance de u à F** , notée $d(u, F)$ le réel :

$$d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\|.$$

- Si p_F désigne la projection orthogonale sur F , alors $p_F(u)$ est l'unique vecteur $v_0 \in F$ tel que

$$\|u_0 - v\| = \min_{v \in F} \|u - v\|.$$

- **Conséquences :**

$$d(u, F) = \|u - p_F(u)\| \quad d^2(u, F) = \|u\|^2 - \|p_F(u)\|^2.$$

Exercice. Retour à l'exercice précédent.

- 1) Dans \mathbb{R}^3 , $u = (1, 2, 3)$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$. Calculer la distance de u à F .
- 2) Dans $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$. Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.
- 3) Un grand classique. Déterminer les valeurs de (a, b, c) telles que $\int_{-1}^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$ est minimale.

III Savoir-faire

- 1) Savoir prouver qu'une application est un produit scalaire.
- 2) Savoir mettre en oeuvre l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour prouver une inégalité.
- 3) Savoir prouver que deux sev sont orthogonaux.
- 4) Savoir mettre en oeuvre le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (en dimension 2,3 pas plus sans quoi les calculs peuvent devenir inextricables).
- 5) Savoir déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur par les deux méthodes, en choisissant la meilleure adaptée au contexte.
- 6) Résoudre un problème de minimisation.