Lois usuelles, espérance, variance

Exercice 1. (♡) Un joueur dans un casino joue sur une machine qui renvoie un entier N dans $\mathbb{N}^*$ selon la probabilité $P(N=n)=\frac{1}{2^n}$. Si n est pair le joueur gagne n jetons et si n est impair, le joueur perd n jetons.

1) Calculez la probabilité de gagner à ce jeu.
2) Soit G le gain algébrique du joueur ($G<0$ si le joueur perd), donnez G et calculez son espérance.

Exercice 2. (♡♡) Soit $\lambda>0$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est décrite par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(X=n)=\frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

1) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{n+2}$.
2) Calculer λ.
3) Démontrer que X est d'espérance finie; calculer cette espérance.
4) La variable X admet-elle une variance?

Exercice 3. (♡♡) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y si:

1) si X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et $Y=(-1)^X$.
2) si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in[0,1]$ et $Y=\dfrac{1}{X+1}$.
3) si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ et $Y=\dfrac{1}{X+1}$.
4) si X suit une loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$ et $Y=\dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 4. (♡♡) Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p\in]0;1[$. On définit $Y=\Omega\to\mathbb{R}$ par : $\forall\omega\in\Omega$,

$$Y(\omega)=\begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ X(\omega)+1 & \text{sinon}\end{cases}$$

Démontrer que $Y/2$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Exercice 5. ($*$) On dispose d'une pièce déséquilibrée, qui tombe sur F avec probabilité $p\in]0,1[$. On lance la pièce jusqu'à l'obtention d'au moins un résultat F et au moins un résultat P.

1) Démontrer que le jeu s'arrête presque sûrement.
2) On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que le jeu se termine.

Calculer $\mathbf{E}(X)$. Pour quelle valeur de p cette espérance est-elle minimale?

Exercice 6. ($*$) Soit T une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1.
On pose $M=\begin{pmatrix}2T & 1\\ -4 & T\end{pmatrix}$.

1) Quelle est la probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes?
2) Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable?

Exercice 7. $(*)$

1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \cdots, N\}$ pour un entier N non nul.

   Démontrer que $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N}(2k-1)P(X \geqslant k)$.

2) On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus petit nombre obtenu.

   -a- Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X \geqslant k)$. En déduire une expression de $E(X)$; déterminer un équivalent de $E(X)$ quand N tend vers l'infini.

   -b- Donner une expression de $V(X)$ puis un équivalent quand N tend vers l'infini.

Exercice 8. $(**)$ Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. Par exemple, avec $n=5$, si les six tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, on pose $X=5$.

1) Justifier que, pour $k \in [\![2, n+1]\!]$, l'événement ($X = k$) est de probabilité non nulle.

2) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que
$$P(X > k+1) = P(X > k+1 \mid X > k)P(X > k).$$

3) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,
$$P(X > k) = \frac{n!}{n^k(n-k)!}.$$

4) Établir que
$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} P(X > k) = \frac{n!}{n^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 9. $(**)$ Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages. À chaque tirage, on ajoute c boules de la même couleur que celle que l'on vient de tirer. On note B_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le n-ième tirage amène une boule blanche et 0 sinon. Enfin, on note $S_n = B_1 + \cdots + B_n$.

1) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$, $P\left(B_{n+1} = 1 \mid S_n = k\right)$. Démontrer que
$$P\left(B_{n+1} = 1\right) = \frac{1 + cE\left(S_n\right)}{2 + cn}.$$

2) Déterminer la loi de B_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 10. $(**)$ Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire une au hasard, on retire de l'urne toutes celles dont le numéro est strictement plus grand que celle qu'on a obtenue, puis on la remet dans l'urne, et on recommence.

On note X_p la variable aléatoire qui donne le numéro de la boule piochée au rang p.

1) Donner la loi de X_1, puis $X_p(\Omega)$ et $P\left(X_p = n\right)$.

2) Montrer qu'on a $P\left(X_{p+1} = k\right) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}P\left(X_p = j\right)$.

3) Montrer que X_p a une espérance finie et qu'on a $E\left(X_{p+1}\right) = \frac{1}{2}E\left(X_p\right) + \frac{1}{2}$.

4) Exprimer $E\left(X_p\right)$ en fonction de p.

5) Montrer qu'on a $E\left(X_{p+1}^2\right) = \frac{1}{2}E\left(X_p^2\right) + \frac{3}{2}E\left(X_p\right) + \frac{1}{6}$.

6) Trouver une relation entre $V\left(X_{p+1}\right)$ et $V\left(X_p\right)$.

Fonctions génératrices

Exercice 11. ($\heartsuit$)
Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi de probalilité est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X = 2n+1) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

1) Calculer sa fonction génératrice à l'aide de fonctions usuelles.
2) En déduire son espérance et sa variance.

Exercice 12. ($\heartsuit\heartsuit$) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour $t \in [-1;1]$, $G_X(t) = \dfrac{at}{(2-t)^2}$.

1. Déterminer a.
2. Déterminer la loi de X.

Exercice 13. ($\heartsuit\heartsuit$) Une variable aléatoire X vérifie $G_X(t) = \lambda \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer λ puis la loi de X. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Couple de variables aléatoires

Exercice 14. ($\heartsuit\heartsuit$) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On définit une variable aléatoire Y de la manière suivante. Pour $k \in \mathbb{N}$, on suppose que sachant $(X = k)$, Y suit une loi binomiale de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

1. Soit $(k, l) \in \mathbb{N}^2$. Que vaut $P_{X=k}(Y = l)$?
2. En déduire la loi de Y. *On doit trouver une loi de Poisson.*

Exercice 15. ($\heartsuit\heartsuit$)

1. Montrer que si k, l et n sont trois entiers naturels tels que $l \leqslant k \leqslant n$, alors

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$$

2. On dispose d'une urne contenant une proportion $p \in]0;1[$ de boules blanches et d'une pièce donnant pile avec la probabilité $\alpha \in]0;1[$.
   On tire n boules de l'urne avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Lorsqu'on obtient k boules blanches ($k \in \mathbb{N}$), on lance k fois la pièce et on note Y le nombre piles obtenus.
   (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.
   (b) Montrer que Y suit une loi binomiale de paramètres n et αp.

Exercice 16. ($*$) On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0;1[$ et d'une urne contenant une proportion α de boules rouges.
On lance la pièce jusqu'à obtenir Pile. Si le premier Pile est obtenu au $k$ième lancé, on effectue alors k tirages successifs et avec remise d'une boule de l'urne. On note X le rang d'obtention du premier Pile et Y le nombre de boules rouges obtenues.

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{j+1}} = \sum_{l=j}^{+\infty} \binom{l}{j} x^{l-j}.$$
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer la loi de Y.

Exercice 17. ($\heartsuit\heartsuit$) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :
$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P(X=i, Y=j) = \alpha \frac{i}{2^{i+j}}$$
où α est une constante.

1. Exprimer la loi de X; en déduire la valeur de α.
2. Déterminer la loi de $X+Y$.
3. Déterminer la probabilité de l'événement $X = Y$.

Exercice 18. ($*$) Une secrétaire effectue n appels vers n correspondants distincts ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$). À chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est $\frac{1}{3}$. On note X le nombre de clients obtenus.
Après ces n recherches, la secrétaire rappelle une deuxième fois, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenu la première fois. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus lors de la deuxième série d'appels et Z le nombre total de correspondants obtenus au cours des deux séries d'appels (donc $Z = X + Y$).

1) Déterminer la loi de X et celle de $Y_{X=j}$ (réponse rapide).
2) Montrer que Z suit une loi binomiale de paramètres à déterminer. *On pourra utiliser au cours du calcul après l'avoir démontrée la relation* $\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$ = *le produit de deux autres coefficients binomiaux.*
3) On suppose désormais que le nombre de correspondants que la secrétaire cherche à joindre au cours de ses deux séries d'appels suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer dans ce cas la loi de Z.

Exercice 19. ($**$) On remplit une urne avec n boules tirées aléatoirement, chacune étant blanche avec probabilité p et noire avec probabilité $1-p$. Une fois ces n boules insérées dans l'urne, on ajoute une $n+1$-ième boule, blanche. On note B la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches tirées parmi les n.

1) Donner la loi de B.
2) On effectue des tirages avec remise dans l'urne, jusqu'à l'obtention d'une boule blanche. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une boule blanche. Donner la loi de T. On ne cherchera pas à simplifier la somme obtenue.
3) Démontrer que T est d'espérance finie et la calculer.