X. Séries entières

- Rayon de convergence : définition et méthode de calculs (double inégalité, relation de comparaison, règle de d'Alembert).
- Opérations sur les séries entières et et propriété de leur rayon de convergence (somme et produit de Cauchy).
- Convergence normale de la série entière sur tout segment de $]-R, R[$.
- Régularité de la somme : continuité, intégration terme à terme, classe $\mathcal{C}^k$.
- Fonctions développables en série entière. Série de Taylor. Développements en série entière usuels.
- Recherche d'une solution DSE d'une équation différentielle sur des exemples.

XI. Variables aléatoires discrètes

- Variables aléatoires. Loi de probabilité.
- Lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale (déjà vus en PCSI) géométrique, Poisson.
- Espérance. Anti-répartition. Linéarité. Formule de transfert. Espérance des lois usuelles.
- Variance.Ecart-type. Formule de Konig-Huyghens. Usage de $E(X(X-1))$ et $E(X(X+1))$ pour le calcul de $E(X^2)$. Propritétés de la variance. Variance des lois usuelles.

Questions de cours (preuve à connaître)

- $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
- DSE de $\lambda(1+x)$ et $\operatorname{Arctan} x$.
- DSE de $\cos x$ par deux méthodes.
- Rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$.
- Espérance des lois usuelles.

Rappel des exemples traités en cours qui doivent être maitrisés :

- Rayon de convergence des séries entières $\sum \sin(n) z^n$, $\sum a_n z^n$ où a_n est le n-ième chiffre des décimales de $\sqrt{2}$, $\sum \dfrac{n}{n^2+n+1} z^n$, $\sum \dfrac{z^n}{(2n)!}$, $\sum \mathrm{e}^{\cos(n)} z^n$, $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$,$\sum \dbinom{2n}{n} z^{2n+1}$ (série lacunaire)
- En utilisant le produit de Cauchy de $\sum z^n$ par elle-même, donner le rayon de convergence de la série produit de Cauchy et calculer la somme.
- Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ en prouvant la convergence uniforme de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ sur $[0,1]$.
- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$xy'' + y = 1.$$