

Ex 8 $f(x) = \text{Arctan}^2 x$

1) . Arcsin est la primitive de $g: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $] -1, 1[$ qui s'annule en 0

Or $g: x \mapsto (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ à l'aide du DSE de $(1+u)^d$, avec $d = -\frac{1}{2}$ et $u = -x^2$, de rayon de convergence 1.

Donc par primitivation Arcsin est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 1.

Par produit de Cauchy de g par g ,
 f admet un développement en série entière
 de rayon de convergence $R \geq \min(1, 1)$

Par ailleurs, f est définie sur $[-1, 1]$ donc $R \leq 1$. Finalement $R = 1$.

e) . Arcsin est donc par produit f est ^{2x} dérivable sur $] -1, 1[$ avec pour $x \in] -1, 1[$,

$$f'(x) = 2 \text{Arctan}(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ = 2 \text{Arctan}(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{1-x^2} + 2 \text{Arctan}(x) (-2x) \left(-\frac{1}{2}\right) (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{1-x^2} + 2x \text{Arctan}(x) \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2} f'(x)$$

D'où $(1-x^2)f''(x) = 2f'(x) + 2$

3) On pose $g = f'$ et comme f est DSE sur $] -1, 1[$ alors g aussi par dérivation on pose :

$$\forall x \in]-1, 1[, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Alors on peut dériver terme à terme g sur $] -1, 1[$ (tant que somme de série entière de rayon de convergence 1)

$$\forall x \in]-1, 1[, g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

D'où pour $x \in]-1, 1[$,

$$(1-x^2) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 2 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 2 = 0$$

On décale les indices :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - 2 = 0$$

$$(a_1 - 2) + (2a_2 - a_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} - a_{n-1}] x^n = 0$$

Par unicité des coefficients d'un DSE :

$$\begin{cases} a_1 - 2 = 0 \\ 2a_2 - a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2, (n+1)a_{n+1} - n a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Or } a_0 = g(0) = f'(0) = 0$$

D'où

$$\begin{cases} a_2 = 2 & a_0 = a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2, a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_{n-1} \end{cases}$$

• $a_0 = 0$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0}$$

• Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} a_{2n-1} \\ &= \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} a_{2n-3} \\ &= \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \dots \frac{2}{3} a_1 \end{aligned}$$

On intègre les paires au dénominateur :

$$a_{2n+1} = \frac{[2n(2n-2) \dots 4 \times 2]^2}{(2n+1)!} a_1$$

Or $a_1 = g'(1) = f''(1) = 2$ (avec le calcul de f'')

D'où

$$\boxed{a_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \times 2}$$

Donc en intégrant g pour obtenir f :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + C$$

$C = 0$ car $f(0) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+2} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n-1} ((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n}}$$

Exercice 10

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

1) On pose $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

Méthode 1:

$$|a_n| = \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

$$\text{Rém. } R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum |a_n| z^n\right)$$

$$\text{Donc } R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum \frac{1}{n^2} z^n\right) = 1.$$

Méthode 2: a_n ne s'annule pas

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{(n+1)n} \frac{n(n-1)}{1} \sim 1$$

d'où le rayon de convergence $\frac{1}{1} = 1$

e/ On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ pour $x \in]-1, 1[$

En tant que somme de séries entières, f est dérivable sur $] -1, 1[$ (car $R=1$) et on peut dériver terme à terme :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, f'(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \end{aligned}$$

$$f'(x) = \ln(1+x)$$

Donc : $f(x) = (x+1) \ln(1+x) - (x+1) + C$

Avec $f(0) = 0$ on trouve $C = 1$

$$\text{Donc } \boxed{f(x) = (x+1) \ln(x+1) - (x+1) + 1}$$

pour $x \in]-1, 1[$

$$3) \left| \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \right| = \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2} : \text{terme général d'une série convergente}$$

Donc par comparaison, $\sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ est absolument convergente donc convergente.

De même : $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ convergente.

Donc en posant $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$

$\sum u_n$ converge simplement sur $[-1, 1]$

(sur $]-1, 1[$ d'après 1, et en ± 1 d'après ce qui précède)

Donc f est définie sur $[-1, 1]$.

On veut calculer $\sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = f(1)$

Montrons que f continue en 1 en montrant qu'elle l'est sur $[0, 1]$.

* $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $[0, 1]$

* $\forall x \in [0, 1]$, $|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$

Donc $\|u_n\|_{0, [0, 1]} \leq \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série CV

Donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$

donc converge uniformément sur $[0, 1]$

Par transitif de continuité, f continue sur $[0, 1]$ en particulier en 1.

Donc $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$f(1) = 2 \ln 2 - 1$ en utilisant l'expression de $f(x)$ de 2).

Exercice 12 $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \binom{2n}{n}$

1) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} 2 \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu:

$$(n+1) a_{n+1} = -2 \binom{2n}{n} a_n$$

2/. En utilisant 1/ on a:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2 \binom{2n}{n}}{n+1} \quad (a_n \neq 0)$$

$$n \rightarrow \infty$$

Donc le rayon de convergence vaut $\frac{1}{4}$

• En tant que somme de série entière de rayon de convergence $\frac{1}{4}$, f est dérivable sur $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} [$ et on peut intégrer terme à terme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ &= -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} a_n x^n \quad \text{d'après 1/} \\ &= -4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= -4x f'(x) + 2 f(x) \end{aligned}$$

D'où $f'(x) - \frac{2}{1+4x} f(x) = 0$ pour $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$

3/ On pose $a: x \mapsto -\frac{2}{1+4x}$

et une primitive $A: x \mapsto -\frac{1}{2} \ln |1+4x|$

D'où $f: x \mapsto \lambda \cdot \frac{1}{2} \ln(1+4x)$

$f: x \mapsto \lambda \sqrt{1+4x}$

Or $f(0) = a_0 = \frac{(-1)^0}{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$ $f(0) = 1$

D'où : $f: x \mapsto -\sqrt{1+4x}$