XI. Variables aléatoires discrètes

- Variables aléatoires. Loi de probabilité.
- Lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale (déjà vus en PCSI) géométrique, Poisson.
- Espérance. Anti-répartition. Linéarité. Formule de transfert. Espérance des lois usuelles.
- Variance.Ecart-type. Formule de Konig-Huyghens. Usage de $E(X(X-1))$ et $E(X(X+1))$ pour le calcul de $E(X^2)$. Proprités de la variance. Variance des lois usuelles.
- Fonctions génératrices. Définition. Convergence normale, continuité sur $[-1,1]$. Elle caractérise la loi. Fonctions génératrices des lois usuelles. Expression de l'espérance (à connaître), de la variance (à savoir retrouver rapidement).
- **Pas de couples de variables aléatoires indépendantes**.

XII. Espaces préhilbertiens

- Produit scalaire. Produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Orthogonalité : vecteurs, famille de vecteurs, sous-espaces vectoriels. Théorème de Pythagore.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Espérance des lois usuelles.
- Si X est d'espérance finie alors G_X est dérivable en 1 et $E(X)=G'_X(1)$.
- Produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille orthogonale alors $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

Rappel des exemples traités en cours qui doivent être maitrisés :

- Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in]0,1[$.
  On pose $Y=\dfrac{1}{X+1}$. Calculer $E(Y)$.
- Dans une urne, il y a une boule rouge et une boule verte. On tire une boule. Si elle est rouge, on arrête et si elle est verte on la remet avec une rouge supplémentaire et on recommence.
  On note X le nombre de tirages effectués. On convient que $X=+\infty$ lorsqu'on n'obtient jamais de boule rouge.
  -a- Calculer $P(X=+\infty)$.
  -b- X est-elle d'espérance finie et si oui que vaut son espérance?
- Soit $p\in[0,1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine O. A chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite ou d'une unité vers la gauche avec les probabilités respectives p et $1-p=q$. A l'instant initial la puce est à l'origine. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose X_n l'abscisse de la puce à l'instant n. Déterminant l'espérance de X_n.
- Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que :
  $$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad P(X=k)=\frac{a}{k+1}\binom{n}{k}.$$
  -a- Calculer a pour que X soit effectivement une variable aléatoire.
  -b- Déterminer $E(X)$ et $V(X)$ dans ce cas. *Indication : calculer* $E(X+1)$, $E(X(X+1)$.
- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall t\in[-1,1]$, $G_X(t)=\dfrac{1}{2-t}$. Déterminer la loi de X.
- $(P,Q)\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\quad \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.