Programme de colle de mathématiques

Semaine 15 - Du 26 au 31 Janvier 2026

XI. Variables aléatoires discrètes

- Fonctions génératrices. Définition. Convergence normale, continuité sur $[-1,1]$. Elle caractérise la loi. Fonctions génératrices des lois usuelles. Expression de l'espérance (à connaître), de la variance (à savoir retrouver rapidement).
- **Pas de couples de variables aléatoires indépendantes**.

XII. Espaces préhilbertiens

- Produit scalaire. Produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Orthogonalité : vecteurs, famille de vecteurs, sous-espaces vectoriels. Théorème de Pythagore.
- Bases orthonormales. Procédé d'othonormalisation de Gram-Schmidt. Expression des coordonnées, du produit scalaire dans une base orthonormale.
- Orthogonal d'une partie de E, d'un sous-espace vectoriel de E. Si F de dimension finie $F \underset{\perp}{\oplus} = E$.
- Projection orthogonale. Méthodes de calculs : (1) expression dans une base orthonormale, (2) caractérisation $u - p_F(u) \perp F$.
  Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E.

XIII. Théorèmes d'échange de symboles

- Théorème de convergence dominée.
- **Pas d'integration terme à terme, pas d'intégrales à paramètres.**

Questions de cours (preuve à connaître)

- Si X est d'espérance finie alors G_X est dérivable en 1 et $E(X) = G'_X(1)$.
- Produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille orthogonale alors $$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$
- Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie $F \oplus F^{\perp} = E$.

Rappel des exemples traités en cours qui doivent être maitrisés :

- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall t \in [-1,1]$, $G_X(t) = \dfrac{1}{2-t}$. Déterminer la loi de X.
- $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.
- Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer une base orthonormée du plan $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/ 2x - y + z = 0\}$.
- Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(\,P\,|\,Q\,) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on considère $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 2x\}$. Déterminer $F^{\perp}$ et $(3,4)^{\perp}$.
- Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On pose $u = (1,-1,2,0)$, $v = (0,1,2,0)$ et $F = \mathrm{Vect}(u,v)$. Déterminer une base de $F^{\perp}$.
- Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et p l'endomorphisme canoniquement associé à A. Montrer que p est un projecteur orthogonal.
- Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer la projection orthogonale de $u = (1,2,3)$ sur $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F.
- **A retenir**. Soit E un espace préhilbertien et u un vecteur non nul.
  - -a- Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(a)$.
  - -b- Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur l'hyperplan $(\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(\,P\,|\,Q\,) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (1,2,3)$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$. Calculer la distance de u à F.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(\,P\,|\,Q\,) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.
- Un grand classique. Déterminer les valeurs de (a,b,c) telles que $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2\,\mathrm{d}t$ est minimale.
- Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
- Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n+1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.
- Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.